

BCPST2 – Mathématiques

DS2- 3H

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Cours

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

(a) $x \mapsto \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$,

(b) $x \mapsto \sin(x) \cos(2x)$.

2. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1+x^2y^2}$.

3. Déterminer la nature des intégrales suivantes.

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$ (s'il y a convergence, on donnera la valeur de l'intégrale) ;

(b) $\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})} dx$ en utilisant un équivalent.

(c) $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2} \right) dt$.

Exercice 2 - Retour sur le DS1

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{3}{4} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right).$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{3}{4} \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

1. Dresser le tableau de variation de f (on précisera les limites aux bornes et la valeur des éventuels extrema).
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, \sqrt{3}]$.
3. Dresser le tableau de variations sur $[1, \sqrt{3}]$ de $g : x \mapsto f(x) - x$.
4. En déduire que (u_n) est croissante.
5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Problème

Partie 1– Étude d’une fonction

On considère la fonction f définie sur $] - \infty, 1[$ par :

$$\forall t \in] - \infty, 1[, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montre que f est continue sur $] \infty, 1[$.
2. (a) Montrer : $\forall t \in] - \infty, 1[, \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0$.
 (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 0[$ et sur $] 0, 1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.
 (c) En déduire la monotonie de f sur $] - \infty, 1[$.
3. (a) Donner le développement limité à l’ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1-t)$.
 (b) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.
 (c) Montrer enfin que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 1[$.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.

5. Python

- (a) Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument un réel $t \in] - \infty, 1[$ et qui renvoie la valeur de $f(t)$.
- (b) On considère le script suivant :

```
1 T = np.linspace(-1, 0, 100)
2 Y = # à compléter
3 plt.plot( # à compléter )
4 plt.show()
```

Expliquer la première ligne puis compléter le script afin qu’il affiche le graphe de f sur $[-1, 0]$.

Partie 2– Étude d’une fonction définie par un intégrale.

On considère maintenant la fonction L définie sur $] - \infty, 1[$ par :

$$\forall x \in] - \infty, 1[, \quad L(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On admettra dans toute la suite que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$.

6. Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 1[$ et préciser L' .
7. Python.

- (a) Énoncer le théorème des sommes de Riemann et expliquer son lien avec la méthode des rectangles.
- (b) On souhaite écrire un programme qui calcul une valeur approchée de $L\left(\frac{1}{2}\right)$ par la méthode des rectangles.

```

1      n=1000
2      a = 0
3      b = 1/2
4      S = 0
5      h = b-a/n
6      for k in range(n):
7          S = h*f(a+k*h)
8      print(S)
    
```

Le script ci-dessus convient-il ? Justifier votre réponse et, si nécessaire, corriger le.

8. Étude de L en 1 :

- (a) Étudier la nature de $\int_0^1 \ln(1-t)dt$.

Indication : on pourra effectuer une intégration par parties et considérer la fonction $u : t \mapsto t-1$.

- (b) En déduire que $\int_0^1 f(t)dt$ converge puis, à l'aide d'un changement de variable, que :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt.$$

- (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0, 1[, \frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^n -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$.

- (d) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ montrer que $\int_0^1 -t^k \ln(t)dt$ converge et :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t)dt = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

- (e) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{-t \ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0, 1[$.

(On pourra commencer par calculer les limites en 0 et en 1).

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$ converge puis montrer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} = 0.$$

- (f) Déduire des questions précédentes que

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t} dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

- (g) En déduire que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

9. (a) Justifier que la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est dérivable sur $] -1, 0[$ et sur $]0, 1[$ et calculer sa dérivée sur ces intervalles.
- (b) En déduire : $\forall x \in [-1, 1], L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.
- (c) Préciser alors la valeur de $L(-1)$.

Partie 3– Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction Φ définie sur le pavé ouvert $] -\infty, 0]^2$ par :

$$\forall (x, y) \in] -\infty, 0]^2, \quad \Phi(x, y) = L(x) + L(y) - L(-xy).$$

10. (a) Justifier que Φ est de classe C^1 et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1.
- (b) En déduire que Φ possède un unique point critique que l'on déterminera.
11. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $h \mapsto L(-1 + h)$.
- (b) En déduire un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\Phi(-1 + h, -1 + h)$.
- (c) De même, trouver le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\Phi(-1 + h, -1 - h)$.
12. La fonction Φ possède-t-elle un extremum ?