

BCPST2 – Mathématiques

DS2- CORRECTION

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

1. (a) On sait que :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).\end{aligned}$$

On en déduit donc ($\lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$) :

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

Ainsi :

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \frac{1}{8}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

(b) On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \quad ; \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

On n'a pas besoin d'aller à l'ordre 3 pour le cosinus car un terme du cosinus va être multiplié au minimum par le terme en x du sinus.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sin(x) \cos(2x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right) \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) \\ &= x - \frac{13}{6}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).\end{aligned}$$

2. On admet que la fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2}{2\sqrt{1+x^2y^2}} = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2y^2}}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

3. (a) La fonction $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est généralisée en $+\infty$.

Soit $A > 0$. On a :

$$\int_0^A \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \int_0^A \arctan(x) \arctan'(x) dx = \left[\frac{\arctan^2(x)}{2} \right]_0^A = \frac{\arctan^2(A)}{2}$$

$$\text{Donc : } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$ est donc convergente et vaut $\frac{\pi^2}{8}$.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}$ est continue sur $]0, 1]$. L'intégrale est donc généralisée en 0.

On sait par ailleurs que

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ on en déduit :

$$\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{x}$$

puis par compatibilité des équivalents avec le quotient :

$$\frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont continues et positives sur $]0, 1]$ donc d'après le critère d'équivalent pour les intégrales de fonctions continues positives, on sait que

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})} dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{sont de même nature.}$$

Soit $a \in]0, 1]$. On a

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}.$$

Ainsi $\lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$ et l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est donc convergente.

On peut ainsi conclure que $\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})} dx$ est convergente.

- (c) Pour tout $t \geq 1$, on a $\frac{\sin(t)}{t^2} > -1$ donc la fonction $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2}\right)$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale est donc généralisée en $+\infty$.
On sait que

$$\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$$

et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} = 0$ on en déduit :

$$\ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{t^2}.$$

Attention, ces fonctions ne sont pas positives ! On ne peut donc pas appliquer le théorème d'équivalent. On va donc étudier la convergence absolue.

Par compatibilité des équivalents avec la valeurs absolue on a :

$$\left| \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2}\right) \right| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\sin(t)|}{t^2}.$$

Maintenant que l'on compare sont bien positives et continues sur $[1, +\infty[$ donc par le théorème d'équivalent on en déduit que :

$$\int_1^{+\infty} \left| \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2}\right) \right| dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt \quad \text{sont de même nature.}$$

D'autre part,

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{|\sin(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

et on montre facilement que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Ainsi par le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt$ converge.

On peut donc conclure que $\int_1^{+\infty} \left| \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2}\right) \right| dt$ converge.

Ainsi $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{t^2}\right) dt$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 2

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

On en déduit alors facilement :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in [1, \sqrt{3}]$ ». Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- **Initialisation** : c'est immédiat car $u_0 = 1$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [1, \sqrt{3}]$.

Or, on sait d'après le tableau de variation, que f est croissante sur $[1, +\infty[$. Ainsi, on en déduit :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3}).$$

Or :

- $f(1) = \frac{3}{2} \geq 1$
- $f(u_n) = u_{n+1}$
- $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{4} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3}$.

Ainsi on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [1, \sqrt{3}]$.

3. La fonction g est somme de fonctions dérivables donc est dérivable. De plus :

$$\forall x \in [1, \sqrt{3}], \quad g'(x) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) - 1 = -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) < 0.$$

Ainsi, après avoir calculer $g(1)$ et $g(\sqrt{3})$:

x	1	$\sqrt{3}$
Variations de g	$\frac{1}{2}$	0

4. La question précédente montre que : $\forall x \in [1, \sqrt{3}], \quad f(x) - x \geq 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n \in [1, \sqrt{3}]$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0.$$

La suite est donc croissante.

5. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$ donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

Notons ℓ sa limite.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

Donc, par préservation des inégalités larges par passage à la limite on en déduit :

$$1 \leq \ell \leq \sqrt{3}.$$

En particulier, f est continue en ℓ (car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$).

D'après le théorème de point fixe, on en conclut donc que : $f(\ell) = \ell$ ou encore $g(\ell) = 0$.

Or d'après l'étude de la fonction g , on sait que pour tout $x \in [1, \sqrt{3}]$, on a :

$$g(x) = 0 \iff x = \sqrt{3}.$$

Donc finalement,

$$\ell = \sqrt{3}.$$

Problème 1

Partie 1 – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $] - \infty, 1[$ par :

$$\forall t \in] - \infty, 1[, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. La fonction $t \mapsto 1 - t$ est continue sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée la fonction $t \mapsto -\ln(1-t)$ est continue sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$.

La fonction $t \mapsto t$ est continue et ne s'annule pas sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$.

Donc par quotient, f est continue sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$.

Montrons qu'elle est continue en 0. Par équivalents usuels, on sait que :

$$\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t.$$

Donc, par quotient :

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

Ainsi : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.

Finalement f est donc continue sur $] - \infty, 1[$.

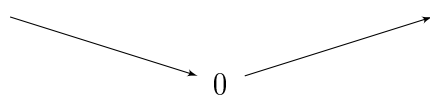
2. (a) On a :

$$\forall t \in] - \infty, 1[, \quad \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) = \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{1-t}.$$

Comme $1-t > 0$ pour tout $t \in] - \infty, 1[$ il suffit d'étudier le signe de $g : t \mapsto t + (1-t)\ln(1-t)$ sur $] - \infty, 1[$. Or g est dérivable sur $] - \infty, 1[$ et pour tout $t \in] - \infty, 1[$ on a :

$$g'(t) = 1 - \ln(1-t) + (1-t) \times \frac{-1}{1-t} = -\ln(1-t).$$

Ainsi :

x	$-\infty$	0	1
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de g			

La fonction g est donc positive sur $] - \infty, 1[$ et ainsi :

$$\forall t \in] - \infty, 1[, \quad \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) = \frac{g(t)}{1-t} \geq 0.$$

- (b) La fonction $t \mapsto 1-t$ est C^1 sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction logarithme est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composée la fonction $t \mapsto -\ln(1-t)$ est C^1 sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$.

La fonction $t \mapsto t$ est C^1 et ne s'annule pas sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$.

Donc par quotient, f est C^1 sur $] - \infty, 0[$ et $]0, 1[$.

De plus, pour tout $t \in] - \infty, 0[\cup]0, 1[$ on a :

$$f'(t) = -\frac{\frac{-1}{1-t} \times t - 1 \times \ln(1-t)}{t^2} = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2} \geq 0 \quad \text{d'après la question 2.(a).}$$

- (c) D'après ce qui précède, f est croissante sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, 1[$. Comme de plus, elle est continue en 0 d'après la question 1 alors elle est croissante sur $] - \infty, 1[$.

3. (a) On a :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2).$$

- (b) Il s'agit de montrer que le taux d'accroissement $\frac{f(t) - f(0)}{t}$ admet pour limite $\frac{1}{2}$ quand t tend vers 0. Or, pour tout $t \neq 0$ dans $] - \infty, 1[$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(0)}{t} &= \frac{-\frac{\ln(1-t)}{t} - 1}{t} = \frac{-\ln(1-t) - t}{t^2} \\ &= \frac{-(-t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)) - t}{t^2} \\ &= \frac{\frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{t^2} \\ &= \frac{1}{2} + o_{t \rightarrow 0}(1). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{1}{2}.$$

Donc f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

- (c) On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$. Il s'agit donc de montrer qu'elle l'est aussi au voisinage de 0 c'est-à-dire que f' est continue en 0. Or $\forall t \in] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$ on a :

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2} = \frac{\frac{t}{1-t} - t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{t^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{1-t} - 1 - t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{t^2} \\
 &= \frac{(1-t)^{-1} - 1 - t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{t^2} \\
 &= \frac{1+t+t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) - 1 - t - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{t^2} \\
 &= \frac{\frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{t^2} \\
 &= \frac{1}{2} + o_{t \rightarrow 0}(1).
 \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \frac{1}{2} = f'(0)$ et f' est bien continue en 0.

4. Par croissance comparée :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$$

et par opération :

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = +\infty.$$

5. La première ligne du script définit un vecteur de 100 coordonnées également répartis entre -1 et 0 .

```

1 def f(t):
2     if t==0:
3         return 1
4     else:
5         return -np.log(1-t)/t
6
7 T = np.linspace(-1,0,100)
8 Y = f(T)
9 plt.plot(T,Y)
10 plt.show()
```

Partie B

6. La fonction L est une primitive de la fonction continue f sur $] -\infty, 1[$ donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$ et pour tout $x \in] -\infty, 1[$ on a

$$L'(x) = f(x).$$

7. (a) Cf. cours

- (b) La variable h devrait contenir la valeur $\frac{b-a}{n}$; il y a donc un problème de parenthésage :

```
1  h=(b-a)/n
```

La variable S ne calcul pas la somme voulue car elle n'est pas incrémentée :

```
1  S += h*f(a+k*h)
```

8. Étude de L en 1 :

- (a) La fonction $t \mapsto \ln(1-t)$ est continue sur $[0, 1[$. L'intégrale est donc généralisée en 1.

Soit $A \in [0, 1[$. On a :

$$\int_0^A \ln(1-t)dt = \int_0^A u'(t)v(t)dt$$

où $u : t \mapsto t-1$ et $v : t \mapsto \ln(1-t)$ sont de classe C^1 sur $[0, A]$. Donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A \ln(1-t)dt &= [u(t)v(t)]_0^A - \int_0^A u(t)v'(t)dt \\ &= [(t-1)\ln(1-t)]_0^A - \int_0^A \frac{-(t-1)}{1-t}dt \\ &= (A-1)\ln(1-A) - A. \end{aligned}$$

Or par croissance comparée, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ donc par composition des limites :

$$\lim_{A \rightarrow 1} \int_0^A \ln(1-t)dt = \lim_{A \rightarrow 1} (A-1)\ln(1-A) - A = 0 - 1 = -1.$$

Ainsi l'intégrale $\int_0^1 \ln(1-t)dt$ converge et vaut -1 .

- (b) On sait que $x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 1$ donc par quotient :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-x).$$

Les fonctions f et $x \mapsto -\ln(1-x)$ sont continues et positives sur $[0, 1[$ donc par le théorème d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives on en déduit que

$$\int_0^1 f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 -\ln(1-t)dt \quad \text{sont de même nature.}$$

Or d'après la question précédente et par linéarité, on sait que $\int_0^1 (-\ln(1-t))dt$

converge donc $\int_0^1 f(t)dt$ converge également.

On effectue ensuite le changement de variable $t : u \mapsto 1-u$ qui est de classe C^1 et strictement monotone de $]0, 1]$ dans $[0, 1[$.

Le théorème de changement de variable assure alors, puisque que $\int_0^1 f(t)dt$ est convergente, que $\int_1^0 f(t(u))t'(u)du$ l'est aussi et :

$$\int_1^0 f(t(u))t'(u)du = \int_0^1 f(t)dt.$$

Or

$$\int_1^0 f(t(u))t'(u)du = \int_1^0 \frac{\ln(1-(1-u))}{1-u}(-1)du = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du.$$

(c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$. On sait que :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

En multipliant membre à membre par $-\ln(t)$ et en réarrangeant un peu les termes on obtient bien :

$$\frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^n -t^k \ln(t) + \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}.$$

(d) Soient $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^k \ln(t)$ est continue sur $]0, 1]$ donc l'intégrale est généralisée en 0.

Soit $A \in]0, 1]$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{-t^{k+1}}{k+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, 1]$ donc par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} \int_A^1 -t^k \ln(t)dt &= \left[\frac{-t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{-t^{k+1}}{k+1} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{A^{k+1}}{k+1} \ln(A) + \int_A^1 \frac{t^k}{k+1} dt \\ &= \frac{A^{k+1}}{k+1} \ln(A) + \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2} \right]_A^1 \\ &= \frac{A^{k+1}}{k+1} \ln(A) + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{A^{k+1}}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

Par croissance comparée : $\lim_{A \rightarrow 0^+} \frac{A^{k+1}}{k+1} \ln(A) = 0$ donc

$$\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 -t^k \ln(t)dt = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Ainsi l'intégrale converge vers la valeur souhaitée.

(e) Par croissance comparée : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t \ln(t)}{1-t} = 0$.

Par limite usuelle $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{-t \ln(t)}{1-t} = 1$.

En particulier, $t \mapsto \frac{-t \ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $[0, 1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée donc $t \mapsto \frac{-t \ln(t)}{1-t}$ est bornée sur $]0, 1[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On montre de même que $t \in]0, 1[\mapsto \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1 si bien que l'intégrale $\int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt$ est faussement généralisée donc convergente.

De plus, en notant $M > 0$ un majorant de $t \mapsto \frac{-t \ln(t)}{1-t}$ sur $]0, 1[$ on a :

$$\forall t \in]0, 1[, \quad 0 \leq \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} \leq Mt^n.$$

Par croissance de l'intégrale (on a déjà montré la convergence des intégrales en jeu) :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt \leq M \int_0^1 \frac{1}{t^n} dt = \frac{M}{n+1}.$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt = 0.$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant la relation obtenue en 8.(b) et puisqu'on a montré que toutes les intégrales ci-dessous convergent, on a par linéarité :

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t} dt &= \sum_{k=0}^n \int_0^1 -t^k \ln(t) dt + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt. \end{aligned}$$

Or, on sait d'après l'énoncé que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et d'après la question

précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1} \ln(t)}{1-t} dt = 0$.

Ainsi en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\int_0^1 -\frac{\ln(t)}{1-t} dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

(g) C'est une conséquence immédiate de la question précédente.

On note encore L la fonction ainsi prolongée en 1.

9. (a) La fonction L est dérivable sur $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$. La fonction $x \mapsto -x$ définie sur $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$ est dérivable et à valeurs dans $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$. Par composition, $x \mapsto L(-x)$ est dérivable sur $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$.

De même, $x \mapsto L(x^2)$ est dérivable sur $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$.

Ainsi, par somme la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est dérivable sur $] - 1, 0[$ et sur $] 0, 1[$ et pour tout $x \in] - 1, 0[\cup] 0, 1[$ sa dérivée en x est donnée par :

$$\begin{aligned} L'(x) - L'(-x) - xL'(x^2) &= f(x) - f(-x) - xf(x^2) \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{-x} + \frac{x \ln(1-x^2)}{x^2} \\ &= \frac{-\ln(1-x) - \ln(1+x) + \ln 1 - x^2}{x} \\ &= \frac{-\ln(1-x)(1+x) + \ln 1 - x^2}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Attention : on ne peut pas conclure que $x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est constante sur $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$ car $] - 1, 0[\cup] 0, 1[$ n'est pas un intervalle !

On peut seulement conclure qu'elle est constante sur $] - 1, 0[$ et constante sur $] 0, 1[$ (avec deux constantes possiblement différentes).

Le but de la question suivante est de montrer qu'en fait ces deux constantes sont égales à 0.

- (b) La fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est dérivable sur $] - 1, 0[$ de dérivée nulle et continue sur $[-1, 0]$. Elle est donc constante sur cet intervalle. En particulier, pour tout $x \in [-1, 0]$:

$$L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)) = 0.$$

De même, pour tout $x \in [0, 1]$, $L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2) = 0$.

- (c) On a :

$$L(-1) + L(1) - \frac{1}{2}L(1) = 0.$$

Donc :

$$L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie 3-Étude d'une fonction de deux variables

10. (a) Les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto -xy$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur $] - \infty, 0]^2$ et à valeurs dans $] - \infty, 0[$.

La fonction L est de classe C^1 sur $] - \infty, 0[$.

Par composition puis somme la fonction φ est donc de classe C^1 sur $] - \infty, 0]^2$.

Pour tout $(x, y) \in] - \infty, 0]^2$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= L'(x) + yL'(-xy) = f(x) + yf(-xy) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) &= L'(y) + xL'(-xy) = f(y) + xf(-xy).\end{aligned}$$

(b) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} f(x) + yf(-xy) = 0 \\ f(y) + xf(-xy) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} xf(x) + xyf(-xy) = 0 & L_1 \leftarrow xL_1 \quad (x \neq 0) \\ yf(y) + yxf(-xy) = 0 & L_2 \leftarrow yL_2 \quad (y \neq 0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} xf(x) + xyf(-xy) = 0 \\ yf(y) - xf(x) = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1.\end{aligned}$$

Or comme x et y sont différents de 0 :

$$yf(y) - xf(x) = 0 \iff \ln(1-x) = \ln(1-y) \iff x = y.$$

D'où

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xf(x) + xyf(-xy) = 0 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} xf(x) + x^2f(-x^2) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}xf(x) + x^2f(-x^2) = 0 &\iff \ln(1-x) - \ln(1+x^2) = 0 \iff 1-x = 1+x^2 \\ &\iff x^2 + x = 0 \\ &\iff x = -1 \quad \text{car } x \neq 0.\end{aligned}$$

On obtient donc que le seul point critique est $(-1, -1)$.

- 11. (a)** La fonction L est dérivable sur $] -\infty, 1[$ de dérivée f elle-même de classe C^1 sur $] -\infty, 1[$. Ainsi L est de classe C^2 sur $] -\infty, 1[$.

Ainsi $h \mapsto L(-1+h)$ est de classe C^2 au voisinage de 0 donc, d'après la formule de Taylor elle admet un DL d'ordre 2 en 0 donné par :

$$L(-1+h) = L(-1) + L'(-1)h + \frac{L''(-1)}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

Or pour tout $x \in] -\infty, -1[$ on a :

$$L'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad L''(x) = f'(x) = \frac{\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)}{x^2}.$$

Donc :

$$L(-1) = -\frac{\pi^2}{12} \quad ; \quad L'(-1) = \ln(2) \quad ; \quad L''(-1) = -\frac{1}{2} + \ln(2).$$

Finalement, on a donc :

$$L(-1+h) = -\frac{\pi^2}{12} + \ln(2)h + \frac{2\ln(2)-1}{4}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

(b) Soit h tel que $-1+h \in]-\infty, 1[$. On a

$$\begin{aligned} \Phi(-1+h, -1+h) &= L(-1+h) + L(-1+h) - L(-(-1+h)^2) \\ &= 2L(-1+h) - L(-1+2h-h^2) \\ &= 2\left(-\frac{\pi^2}{12} + \ln(2)h + \frac{2\ln(2)-1}{4}h^2\right) - \left(-\frac{\pi^2}{12} + \ln(2)(2h-h^2) + \frac{2\ln(2)-1}{4}(2h-h^2)^2\right) \\ &\quad + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= -\frac{\pi^2}{12} + (2\ln(2) - 2\ln(2))h + \left(2\frac{2\ln(2)-1}{4} + \ln(2) - 2^2\frac{2\ln(2)-1}{4}\right)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= -\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2). \end{aligned}$$

(c) De même, on a :

$$L(-1-h) = -\frac{\pi^2}{12} - \ln(2)h + \frac{2\ln(2)-1}{4}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Phi(-1+h, -1-h) &= L(-1+h) + L(-1-h) - L(-(-1+h)(-1-h)) \\ &= L(-1+h) + L(-1-h) - L(-1+h^2) \\ &= -\frac{\pi^2}{12} + \ln(2)h + \frac{2\ln(2)-1}{4}h^2 - \frac{\pi^2}{12} - \ln(2)h + \frac{2\ln(2)-1}{4}h^2 + \frac{\pi^2}{12} - \ln(2)h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2) \\ &= -\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2). \end{aligned}$$

12. La fonction Φ est de classe C^1 sur le pavé ouvert $] -\infty, 0]^2$.

Donc, si Φ possède un extremum local en un point, ce point est nécessairement un point critique.

D'après **10.(b)**, on en déduit que si Φ possède un extremum local, c'est nécessairement au point $(-1, -1)$ et alors cet extremum vaut :

$$\Phi(-1, -1) = L(-1) + L(-1) - L(-(-1)^2) = L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

— Montrons que Φ n'admet pas de maximum local en $(-1, -1)$.

Supposons par l'absurde que Φ admet en $(-1, -1)$ un maximum local : il existe donc un pavé ouvert P inclus dans $] - \infty, 0]^2$ et contenant $(-1, -1)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in P, \quad \Phi(-1, -1) \geq \Phi(x, y).$$

Or, pour tout h suffisamment proche de 0 (si on note $P =]a, b[\times]c, d[$, pour tout $h < \min(|a + 1|, |c + 1|, |d + 1|, |b + 1|)$) on a :

- (i) $(-1 + h, -1 + h) \in P$;
- (ii) $\Phi(-1, -1) = -\frac{\pi^2}{12} \geq \Phi(-1 + h, -1 + h) = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$

Ainsi, pour tout $h \neq 0$ suffisamment proche de 0, on a :

$$0 \geq h^2 \left(\frac{1}{2} + o_{h \rightarrow 0}(1) \right)$$

et donc ($h^2 > 0$) :

$$0 \geq \frac{1}{2} + o_{h \rightarrow 0}(1)$$

ce qui est absurde car en faisant tendre h vers 0 on obtient : $0 \geq \frac{1}{2}$.

Par conséquent Φ n'admet pas de maximum local en $(-1, -1)$.

— Montrons que Φ n'admet pas de minimum local en $(-1, -1)$.

Supposons par l'absurde que Φ admet en $(-1, -1)$ un minimum local : il existe donc un pavé ouvert P inclus dans $] - \infty, 0]^2$ et contenant $(-1, -1)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in P, \quad \Phi(-1, -1) \leq \Phi(x, y).$$

Or, pour tout h suffisamment proche de 0 (si on note $P =]a, b[\times]c, d[$, pour tout $h < \min(|a + 1|, |c + 1|, |d + 1|, |b + 1|)$) on a :

- (i) $(-1 + h, -1 - h) \in P$;
- (ii) $\Phi(-1, -1) = -\frac{\pi^2}{12} \leq \Phi(-1 + h, -1 - h) = -\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$

Ainsi, pour tout $h \neq 0$ suffisamment proche de 0, on a :

$$0 \leq h^2 \left(-\frac{1}{2} + o_{h \rightarrow 0}(1) \right)$$

et donc ($h^2 > 0$) :

$$0 \leq -\frac{1}{2} + o_{h \rightarrow 0}(1)$$

ce qui est absurde car en faisant tendre h vers 0 on obtient : $0 \leq -\frac{1}{2}$.

Par conséquent Φ n'admet pas de minimum local en $(-1, -1)$.

Finalement, Φ n'admet pas d'extremum.