

Mathématiques – TD4

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 Équations différentielles

Correction de l'exercice 1. 1. On considère l'équation $y'(x) = y(x) \ln x$, $y(1) = 1$.

— **Méthode 1** : on reconnaît une équation linéaire d'ordre 1 donc les solutions sont les fonctions de la forme :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad y(x) = ce^{x \ln(x) - x}$$

car $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de $\ln$.

On détermine ensuite la constante c à l'aide de la condition initiale $y(1) = 1$:

$$1 = y(1) = ce^{-1} \quad \text{d'où} \quad c = e^1.$$

Finalement l'unique solution est la fonction y définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad y(x) = e^{x \ln(x) - x + 1}.$$

— **Méthode (séparation des variables)**

(a) (Analyse) Sur un intervalle I ouvert contenant $x_0 = 1$, contenu dans $]0, +\infty[$ où y ne s'annule pas on a :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \ln(x) \quad \text{et} \quad y(1) = 1$$

De plus, comme $y(1) > 0$ et ne s'annule pas sur I , par le TVI $y > 0$ sur I donc, en primitivant :

$$\ln(y(x)) = x \ln(x) - x + c \quad \text{et} \quad y(1) = 1$$

pour une constante c . En utilisant la condition initiale, on trouve que $c = 1$ donc :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{x \ln(x) - x + 1}.$$

(b) (Synthèse) Vérifions que la fonction y définie sur $I =]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in I, \quad y(x) = e^{x \ln x - x + 1}$$

est solution.

On vérifie assez facilement que cette fonction est de classe C^1 sur I , $y(1) = 1$ et $y'(x) = \ln(x)y(x)$.

2. On considère l'équation $\frac{dy}{dx} = y \ln(x) + 1$, $y(1) = 1$ qui se réécrit aussi $y'(x) = y(x) \ln(x) + 1$.

Il s'agit donc d'une équation avec second membre dont l'équation homogène est l'équation précédente. Les solutions de cette équation homogène sont de la forme

$$y : x \in]0, +\infty[\mapsto ce^{x \ln x - x}$$

pour une certaine constante c .

Appliquons la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière de notre équation non homogène sous la forme

$$y(x) = c(x)e^{x \ln x - x}, x \in I$$

où c est une fonction de classe C^1 sur I , et, pour respecter la valeur initiale $y(1) = 1$, $c(1) = e$. On voit alors que

$$\forall x \in I, c'(x)e^{x \ln x - x} = 1$$

c'est-à-dire

$$c'(x) = e^{-x \ln x + x} \quad \text{et} \quad c(1) = e.$$

D'où

$$\forall x \in I, c(x) = \int_1^x e^{-t \ln t + t} dt + e.$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy est la fonction y définie sur I par :

$$\forall x \in I, y(x) = \int_1^x e^{-t \ln t + t} \cdot e^{x \ln x - x} dt + e^{x \ln x - x + 1}.$$

3. On considère l'équation $y'(x) = -\frac{x^2}{y(x)}$, $y(0) = 1$.

- (a) (Analyse) Cette équation n'a de sens que sur un intervalle I contenant 1 sur lequel y ne s'annule pas et donc, comme $y(0) = 1$, par le TVI, sur un intervalle I où y est strictement positive.

Cette équation implique que

$$\forall x \in I, y(x)y'(x) = -x^2 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

et donc, en intégrant,

$$\forall x \in I, \frac{1}{2}y^2(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}.$$

On obtient alors

$$\forall x \in I, y^2(x) = 1 - \frac{2}{3}x^3$$

Sur l'intervalle I , y ne peut s'annuler et donc $I \subset \left] -\infty, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \right[$ et comme y est strictement positive sur cet intervalle, on obtient finalement

$$\forall x \in I, y(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^3}.$$

- (b) (Synthèse) En définissant, sur $I = \left] -\infty, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \right[$, $y(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^3}$, on a $y(0) = 1$, y de classe C^1 sur I et

$$\forall x \in I, y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{2}{3}x^3}} \left(-\frac{2}{3}3x^2\right) = -\frac{x^2}{y(x)}.$$

On a donc trouvé une solution à ce problème de Cauchy sur un intervalle I , qui, du fait de l'analyse faite, est le plus grand possible et garantit l'unicité de cette solution sur cet intervalle.

4. On considère $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x.y}$ avec $y(1) = 1$ qui s'exprime aussi

$$y'(x) = \frac{x^2 + y^2(x)}{xy(x)}.$$

On travaille sur un intervalle I sur lequel x et y ne s'annulent pas, contenant 1. Posons, sur I , $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. On a $y(x) = xu(x)$ et donc :

$$y'(x) = u(x) + xu'(x).$$

Ainsi y est solution de l'équation d'origine si et seulement si, en substituant, sur I ,

$$u(x) + xu'(x) = \frac{x^2 + x^2u(x)^2}{x^2u(x)} \quad \text{et} \quad u(1) = 1.$$

Après simplification, il vient

$$xu'(x) = \frac{1}{u(x)} \quad \text{et} \quad u(1) = 1$$

c'est-à-dire

$$u(x)u'(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(u(x)^2) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad u(1) = 1.$$

On primitive pour obtenir

$$\forall x \in I, u(x)^2 = 2\ln(x) + 1.$$

Comme u ne peut s'annuler sur I , on a $I \subset]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$ et finalement

$$u(x) = \sqrt{1 + 2\ln x} \quad \text{et} \quad y(x) = x\sqrt{1 + 2\ln x}.$$

On vérifie rapidement, en guise de synthèse que la fonction y définie par $y(x) = x\sqrt{1 + 2\ln x}$ pour $x > e^{-\frac{1}{2}}$, est effectivement solution du problème de Cauchy initial.

Correction de l'exercice 2. Soit y un solution de (E) et soit z la fonction définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par :

$$\forall t \in I, \quad z(t) = y(\tan(t)).$$

Elle est deux fois dérivable car y et $\tan$ le sont et pour tout $t \in I$ on a :

$$z'(t) = (1 + \tan^2(t))y'(\tan(t)) \quad ; \quad z''(t) = (1 + \tan^2(t))^2 y''(\tan(t)) + 2(1 + \tan(t)^2) \tan(t)y'(t).$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z''(t) + 4z(t) = 0.$$

L'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ possède deux racines complexes conjuguées $\pm 2i$ donc il existe a_1 et a_2 des réels tels que pour tout $t \in I$:

$$z(t) = a_1 \cos(2t) + a_2 \sin(2t).$$

La fonction $\tan$ étant bijective de I dans $\mathbb{R}$ de bijection réciproque $\arctan$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$y(x) = a_1 \cos(2 \arctan(x)) + a_2 \sin(2 \arctan(x)).$$

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de la forme $x \mapsto a_1 \cos(2 \arctan(x)) + a_2 \sin(2 \arctan(x))$ sont bien des solutions (il faut le faire !!).

Correction de l'exercice 3. Soit y une solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et posons $z : t \in \mathbb{R} \mapsto y(e^t)$.

Par composition z est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \quad ; \quad z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = e^{2t} y''(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0.$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ et possède une unique solution : -1 .
D'où l'existence de deux constantes a et b telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(e^t) = (at + b)e^{-t}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \frac{a \ln(x) + b}{x}.$$

Réciproquement, on vérifie que les fonctions de la forme ci-dessus sont toutes des solutions de l'équation différentielle.

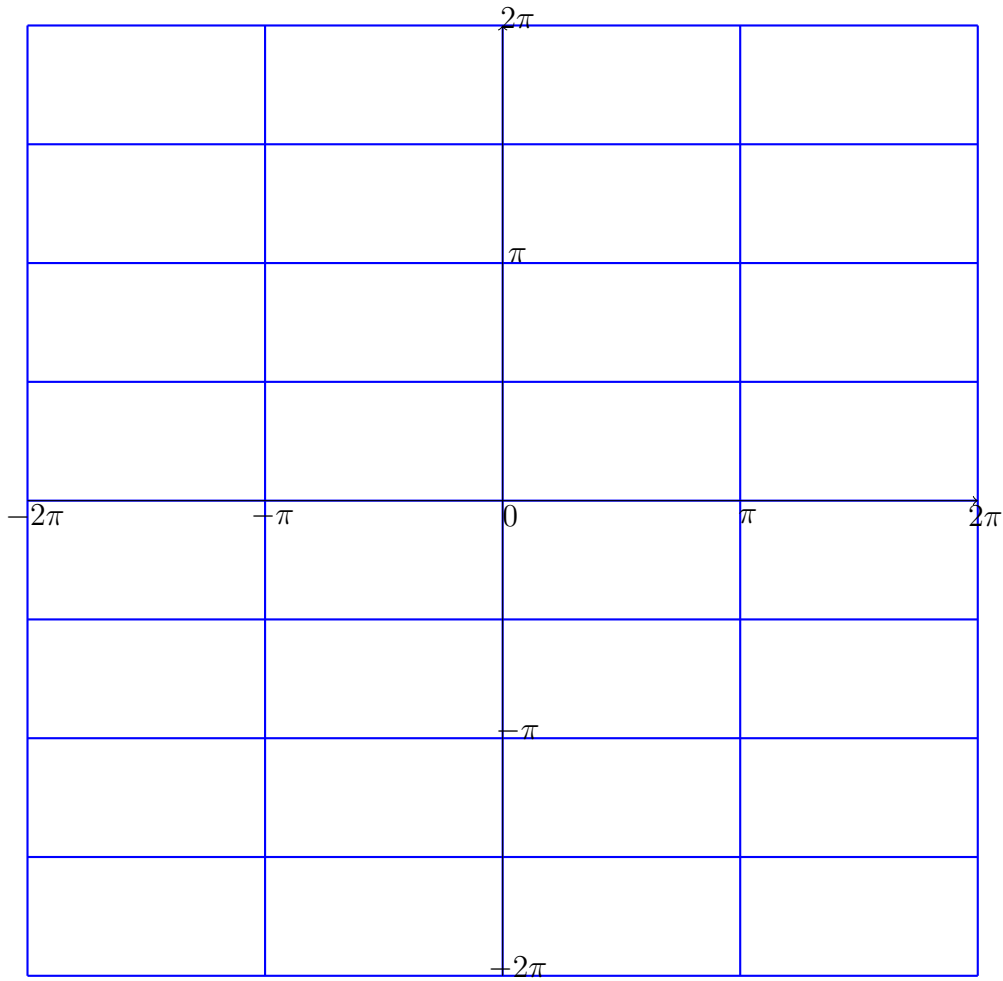
Correction de l'exercice 4.

1. Soit h la fonction définie sur I par : $\forall t \in I, h(t) = \sin(x(t)) \cos(y(t))$. Il s'agit d'une composée de fonction dérivable donc elle est dérivable sur I et pour tout $t \in I$ on a :

$$\begin{aligned} h'(t) &= x'(t) \cos(x(t)) \cos(y(t)) - y'(t) \sin(x(t)) \sin(y(t)) \\ &= \sin(x(t)) \sin(y(t)) \cos(x(t)) \cos(y(t)) - \cos(x(t)) \cos(y(t)) \sin(x(t)) \sin(y(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, h est constante. Comme $h(0) = \sin(x(0)) \cos(y(0)) = 0$ alors :

$$\forall t \in I, \quad h(t) = 0.$$


 FIGURE 1 – En bleu, une partie de l'ensemble E

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \sin(a) \cos(b) = 0 &\iff \sin(a) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(b) = 0 \\ &\iff a = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad b = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\} \times \mathbb{R} \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{R} \times \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \right\} \right).$$

L'ensemble $\{(x(t), y(t)) ; t \in I\} \subset I$.

3. (a) Montrons d'abord que x ne prend aucune des valeurs de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k \neq 0$, $k \neq 1$). Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ ($k \neq 0$, $k \neq 1$) et $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = k$.
- Si $k \geq 2$ alors comme $x(0) = \frac{\pi}{2}$ et que x est continue, alors d'après le TVI, il existe $t_1 \in]0, t_0$ tel que : $x(t_1) = \pi$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.
 - Si $k < 0$ alors comme $x(0) = \frac{\pi}{2}$ et que x est continue, alors d'après le TVI, il existe $t_1 \in]0, t_0$ tel que : $x(t_1) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Ainsi, x ne prend aucune des valeurs de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, d'après la question précédente on déduit donc :

$$\forall t \in I, \exists n(t) \in \mathbb{Z} \quad y(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n(t).$$

La fonction $n : t \mapsto n(t) = \frac{y(t)}{\pi} + \frac{1}{2}$ est continue et à valeurs entières donc constante (sinon, d'après le TVI, elle prendrait des valeurs non entières !). Enfin comme $y(0) = \frac{\pi}{2}$ on a donc :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) C'est immédiat.

(c) Soit z la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I, \quad z(t) = \tan\left(\frac{x(t)}{2}\right).$$

La fonction z est dérivable sur I en tant que composée de fonctions dérivables. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{1}{2} x'(t) \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x(t)}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin(x(t))}{2 \cos^2\left(\frac{x(t)}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{x(t)}{2}\right) \sin\left(\frac{x(t)}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{x(t)}{2}\right)} \\ &= z(t). \end{aligned}$$

Donc, il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad z(t) = ce^t \quad \text{càd} \quad x(t) = 2 \arctan(ce^t).$$

Compte tenu de la condition $x(0) = \frac{\pi}{2}$, on trouve que $c = 1$ et donc

$$\forall t \in I, \quad x(t) = 2 \arctan(e^t).$$

4. Supposons que x prend la valeur 0 ou π et soit t_0 le premier instant où x vaut 0 ou π . Alors sur l'intervalle $J = [0, t_0[$, x ne prend ni la valeur 0 ni la valeur π . D'après la question précédente, on a donc :

$$\forall t \in [0, t_0[, \quad x(t) = 2 \arctan(e^t).$$

Donc par continuité on aurait :

$$x(t_0) = 2 \arctan(e^{t_0}).$$

Cela est contradictoire car :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 < 2 \arctan(e^t) < \pi.$$

Ainsi on est toujours dans les conditions de la question précédente et par conséquent l'unique solution est :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = 2 \arctan(e^t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 5.

1. On a :

$$\forall t \in I, \quad e(t) = x(t)^3 y(t)^4$$

et en dérivant, on obtient pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e(t) &= 3x(t)^2 x'(t) y(t)^4 + 4x(t)^3 y(t)^3 y'(t) \\ &= 3x(t)^2 y(t)^4 (-4x(t)^3 y(t)^3) + 4x(t)^3 y(t)^3 (3x(t)^2 y(t)^4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction e , de dérivée nulle sur I , y est constante. On a

$$\forall t \in I, \quad e(t) = e(0) = 1^3 \times 1^4 = 1.$$

2. On pose $\mathcal{C} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2, E(X, Y) = 1\}$.

(a) On a $(X, Y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $X \neq 0$ et $Y^4 = \frac{1}{X^3}$, c'est-à-dire :

$$X > 0 \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{X^{\frac{3}{4}}} \quad \text{ou} \quad Y = -\frac{1}{X^{\frac{3}{4}}}.$$

C'est la réunion des graphes des fonctions $f_{\pm} : x \in]0, +\infty[\mapsto \pm \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}$

ou du graphe de la fonction $g : y \in \mathbb{R}^* \mapsto \sqrt[3]{\frac{1}{y^4}}$.

(b) Comme, pour $t \in I$ quelconque, $e(t) = 1$ et donc $x(t)^3 y(t)^4 = 1$, on a $(x(t), y(t)) \in \mathcal{C}$.

Finalement $\{(x(t), y(t)), t \in I\} \subset \mathcal{C}$.

On ne peut avoir égalité car $\mathcal{C}$ comporte deux morceaux et la courbe $\{(x(t), y(t)), t \in I\}$ est d'un seul tenant : elle doit donc être contenu dans l'un des deux morceaux et éviter l'autre.

Plus précisément notons

$$\mathcal{C}^+ = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2, X > 0 \text{ et } Y = \frac{1}{X^{\frac{3}{4}}} \right\} \quad ; \quad \mathcal{C}^- = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2, X > 0 \text{ et } Y = -\frac{1}{X^{\frac{3}{4}}} \right\}$$

les deux « morceaux » précédemment évoqués : $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$.

Si $(X, Y) \in \mathcal{C}^+$ alors $Y > 0$ et si $(X, Y) \in \mathcal{C}^-$ alors $Y < 0$.

La fonction y ($t \in I \mapsto y(t)$) est continue sur I et ne s'y annule pas (car sinon $e(t)$ s'annulerait), elle reste donc, par le théorème des valeurs intermédiaires de signe constant, et, comme $y(0) = 1$, on a $y > 0$. On en déduit que pour tout $t \in I$,

$$(x(t), y(t)) \in \mathcal{C}^+ \quad \text{et} \quad (x(t), y(t)) \notin \mathcal{C}^-.$$

- (c) Les fonction x et y sont toutes deux positives (cf le raisonnement précédent pour y , pour x , un argument simple est le suivant : $e(t)$, de par sa formule, est du signe de $x(t)$ et donc $x(t) > 0$.)

Le système différentiel satisfait par (x, y) montre qu'alors, sur I , $x' < 0$ et $y' > 0$. En conclusion x est strictement décroissante alors que y est strictement croissante.

3. (a) On a, pour tout $t \in I$, $x(t)^3 y(t)^4 = 1$ et $y'(t) = 3x(t)^2 y(t)^4$.
Comme $x(t) = y(t)^{-\frac{4}{3}}$, $x(t)^2 = y(t)^{-\frac{8}{3}}$ et donc

$$y'(t) = 3y(t)^{-\frac{8}{3}} y(t)^4 = 3y(t)^{\frac{4}{3}}.$$

On réécrit cette équation sous la forme

$$\forall t \in I, \frac{y'(t)}{y(t)^{\frac{4}{3}}} = 3$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \frac{d}{dt} \left(-3 \cdot y(t)^{-\frac{1}{3}} \right) = 3$$

après intégration, entre 0 et t

$$y(t)^{-\frac{1}{3}} - y(0)^{-\frac{1}{3}} = -t \quad \text{donc} \quad y(t) = \frac{1}{(1-t)^3}.$$

- (b) On a, pour $t \in I$, $x(t)^3 y(t)^4 = 1$ et donc $x(t)^3 = (1-t)^{12}$, donc $x(t) = (1-t)^4$.

Correction de l'exercice 6.

1. En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X'(t) = AX(t).$$

2. (a) En effectuant un pivot de Gauss-Jordan, on vérifie que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) On trouve $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$

3. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = P^{-1}X(t)$

- (a) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff X'(t) = PDP^{-1}X(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) \\ &\iff (P^{-1}X)'(t) = DP^{-1}X(t) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &\iff Y'(t) = DY(t). \end{aligned}$$

(b) Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Y(t) = P^{-1}X(t)$. On a donc

$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = -2y_1 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = 5y_3 \end{cases} \iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-2t} \\ y_2(t) = c_2 e^t \\ y_3(t) = c_3 e^{5t} \end{cases}$$

Ainsi, il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^t \\ c_3 e^{5t} \end{pmatrix}$.

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} c_2 e^t + c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \end{pmatrix}$.

Enfin, les conditions initiales permettent de déterminer c_1, c_2, c_3 :

$$\begin{aligned} X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c_3 = -1 \\ c_2 = 2 \\ c_1 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi l'unique triplet solution est donné par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ e^{-2t} + 2e^t - e^{5t} \\ e^{-2t} + 2e^t \end{pmatrix}.$$

2 Dynamique de population

Correction de l'exercice 7.

1. Puisqu'on admet que pour tout $t \geq 0$, $P(t) > 0$, la fonction $\frac{P'}{P}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On la note z et on a pour tout $t \geq 0$:

$$z(t) = \frac{P'(t)}{P(t)} = r \ln \left(\frac{\kappa}{P(t)} \right)$$

donc

$$z'(t) = -r \frac{kP'(t)}{P(t)^2} \frac{1}{\frac{\kappa}{P(t)}} = -r \frac{P'(t)}{P(t)} = -rz(t).$$

2. On en déduit qu'il existe une constante c telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{P'(t)}{P(t)} = z(t) = ce^{-rt}.$$

En évaluant en 0, on a même $c = r \ln \left(\frac{\kappa}{P_0} \right)$.

En intégrant, on obtient donc l'existence d'une constante d telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \ln(P(t)) = -\frac{c}{r}e^{-rt} + d = \ln \left(\frac{P_0}{\kappa} \right) e^{-rt} + d.$$

En passant à l'exponentielle on a alors :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t) = e^d e^{\ln \left(\frac{P_0}{\kappa} \right) e^{-rt}}.$$

Finalement, en évaluant en 0, on voit que $e^d = \kappa$ d'où l'expression :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t) = \kappa e^{\ln \left(\frac{P_0}{\kappa} \right) e^{-rt}}.$$

Correction de l'exercice 8.

1. (a) Comme P est dérivable, alors f l'est également et on a , pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= rP'(t) \left(1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right) - \frac{r}{\kappa} P'(t)P(t) \\ &= rP'(t) \left(1 - 2\frac{P(t)}{\kappa} \right) \\ &= f(t) \left(1 - 2\frac{P(t)}{\kappa} \right). \end{aligned}$$

En notant G la primitive de $t \mapsto \left(1 - 2\frac{P(t)}{\kappa} \right)$ s'annulant en 0 on a donc une constante c telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = ce^{G(t)}.$$

(b) Par hypothèses : $f(0) = rP_0 \left(1 - \frac{P_0}{\kappa} \right) > 0$ car $P_0 \in]0, \kappa[$. Avec la question précédente on obtient donc :

$$f(0) = ce^{G(0)} = c \quad \text{donc} \quad c > 0.$$

Il est alors clair que pour tout $t \geq 0$:

$$f(t) = f(0)e^{G(t)} > 0.$$

(c) Soit $Q(X) = rX \left(1 - \frac{X}{\kappa} \right)$. Il s'agit d'un polynôme du seconde degré de coefficient dominant négatif et de racines 0 et κ . Son signe est donné par :

x	$-\infty$	0	κ	$+\infty$
$Q(x)$	—	0	+	—

On a par ailleurs, $f = Q \circ P$ qui est continue et telle que $f(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ d'après la question précédente. Donc nécessairement pour tout $t \geq 0$, $P(t) \in]0, \kappa[$.

2. Résolution.

(a) On vérifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \kappa\} \quad \frac{\kappa}{x(\kappa - x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\kappa - x}.$$

(b) Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, l'équation à résoudre est équivalente, en divisant par f à :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{P'(t)}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right)} = r$$

ou encore

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{\kappa P'(t)}{P(t) (\kappa - P(t))} = r$$

ou encore, d'après la question précédente :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{P'(t)}{\kappa - P(t)} = r.$$

Comme les dénominateurs sont positifs (une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$!!) d'après la question 1, on en déduit l'existence d'une constante c telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \ln(P(t)) - \ln(\kappa - P(t)) = rt + c.$$

En passant à l'exponentielle et en isolant P on trouve :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t) = \frac{\kappa e^{rt+c}}{1 + e^{rt+c}}.$$

La constante c peut s'exprimer à l'aide de P_0 :

$$e^c = \frac{P_0}{\kappa - P_0}.$$

3 Preuve

Correction de l'exercice 9. La fonction y est deux fois dérivable car solution de (E) .

1. **Cas où l'équation caractéristique à deux solutions distinctes réelles** notées r_1 et r_2 .

(a) On a, pour tout $r \in \mathbb{R}$:

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2.$$

En identifiant, on obtient donc

$$r_1 r_2 = b \quad \text{et} \quad r_1 + r_2 = -a.$$

(b) D'après la question précédente, on a donc : Ainsi, par linéarité de la dérivation :

$$(y' - r_1 y)' - r_2(y' - r_1 y) = y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = y'' + ay' + b = 0$$

car y solution de (E) . La fonction $y' - r_1 y$ est donc solution de l'équation

$$z' - r_2 z = 0.$$

(c) On en déduit qu'il existe un réel c tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - r_1 y(t) = ce^{r_2 t}$. Résolvons cette équation.

- Équation homogène associée : les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $y_h : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
- Solution particulière : on utilise la méthode de variation de la constante. Cherchons une solution particulière y_p sous la forme $y_p : t \mapsto C(t)e^{r_1 t}$ où C est dérivable. On a alors y_p est solution si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y_p'(t) - r_1 y_p(t) = ce^{r_2 t} &\iff C(t)r_1 e^{r_1 t} + C'(t)e^{r_1 t} - r_1 C(t)e^{r_1 t} = ce^{r_2 t} \\ &\iff C'(t)e^{r_1 t} = ce^{r_2 t} \\ &\iff C'(t) = ce^{(r_2 - r_1)t} \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $C : t \mapsto \frac{c}{r_2 - r_1} e^{(r_2 - r_1)t}$ on obtient une solution particulière :

$$y_p : t \mapsto \frac{c}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}.$$

- Conclusion : les solutions de $y' - r_1 y = ce^{r_2 t}$ sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \frac{c}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}.$$

(d) D'après les questions précédentes, en posant $\lambda_2 = \frac{c}{r_2 - r_1}$, la fonction y est bien de la forme voulue.

(e) On a montré que si y est solution de (E) il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$.

Réciproquement, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et notons y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}.$$

Il est clair que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$y'(t) = r_1 \lambda_1 e^{r_1 t} + r_2 \lambda_2 e^{r_2 t} \quad ; \quad y''(t) = r_1^2 \lambda_1 e^{r_1 t} + r_2^2 \lambda_2 e^{r_2 t}.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) &= \lambda_1 e^{r_1 t} (r_1^2 + ar_1 + b) + \lambda_2 e^{r_2 t} (r_2^2 + ar_2 + b) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi y est bien solution.

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions telle qu'il existe des réels λ_1 et λ_2 pour lesquels : $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$.

2. Cas où l'équation caractéristique à une unique solution réelle notée r_0 .

(a) Comme r_0 est l'unique racine de $r^2 + ar + b$ on sait que :

$$r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = r^2 - 2r_0r + r_0^2$$

donc, par identification $a = -2r_0$ et $b = r_0^2$.

(b) La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$z'(t) = e^{-r_0 t}(y'(t) - r_0 y(t)) \quad \text{et} \quad z''(t) = e^{-r_0 t}(y''(t) - 2r_0 y'(t) + r_0^2 y(t)).$$

Or r_0 étant l'unique racine de $r^2 + ar + b$ on a :

$$r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = r^2 - 2r_0r + r_0^2$$

Ainsi, comme y est solution de $y'' + ay' + b = 0$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z''(t) = e^{-r_0 t}(y''(t) - 2r_0 y'(t) + r_0^2 y(t)) = e^{-r_0 t}(y''(t) + ay'(t) + by(t)) = 0.$$

(c) La fonction z est donc affine : il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z(t) = \lambda_1 + t\lambda_2 \quad \text{i.e.} \quad y(t) = (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}.$$

(d) D'après les questions précédentes, si y est solution de (E) alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z(t) = \lambda_1 + t\lambda_2 \quad \text{i.e.} \quad y(t) = (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}.$$

Réciproquement, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et notons y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}.$$

Il est clair que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$y'(t) = r_0(\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t} + \lambda_2 e^{r_0 t} \quad ; \quad y''(t) = (r_0^2(\lambda_1 + t\lambda_2) + r_0\lambda_2)e^{r_0 t} + r_0\lambda_2 e^{r_0 t}.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) &= e^{r_0 t} (r_0^2(\lambda_1 + t\lambda_2) + r_0\lambda_2 + r_0\lambda_2 + a(r_0(\lambda_1 + t\lambda_2) + \lambda_2) + b(\lambda_1 + t\lambda_2)) \\ &= e^{r_0 t} ((\lambda_1 + t\lambda_2)(r_0^2 + ar_0 + b) + (2r_0 + a)\lambda_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $r_0^2 + ar_0 + b = 0$ et $a = -2r_0$. Ainsi y est solution de E .

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

3. Cas où l'équation caractéristique à deux solutions complexes conjuguées notées $\alpha \pm i\beta$.

(a) La même preuve que la question 1 montre qu'il existe deux complexes λ_1 et λ_2 tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t) = \lambda_1 e^{\alpha + i\beta t} + \lambda_2 e^{\alpha - i\beta t} = e^{\alpha t}(\lambda_1 e^{i\beta t} + \lambda_2 e^{-i\beta t}).$$

(b) Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t)$ est réelle, on a, en passant au conjugué :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \overline{y(t)} = e^{\alpha t}(\overline{\lambda_1}e^{-i\beta t} + \overline{\lambda_2}e^{i\beta t}).$$

En regardant en $t = 0$ on obtient :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = y(0) = \overline{y(0)} = \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2}.$$

En regardant en $t = \frac{\pi}{2\beta}$ on obtient :

$$e^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}(i\lambda_1 - i\lambda_2) = y(0) = \overline{y(0)} = e^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}(-i\overline{\lambda_1} + i\overline{\lambda_2})$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 - \lambda_2 = -\overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2}.$$

En additionnant c'est deux équations on obtient :

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}.$$

Ainsi, en écrivant $2\lambda_1 = A - iB$ on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t} \left(\frac{A - iB}{2} e^{i\beta t} + \frac{A + iB}{2} e^{-i\beta t} \right) \\ &= e^{\alpha t} \left(A \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} - iB \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2} \right) \\ &= e^{\alpha t} \left(A \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + B \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \right) \\ &= e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, si y est solution alors y est de la forme $t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$ pour des réels A, B .

Réciproquement, il faut vérifier que les fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha t} (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))$ pour des réels A, B sont bien toutes solutions.