

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

4.1 Équations différentielles linéaires (BCPST1)

4.1.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 4.1

Soient I un **intervalle** de \mathbb{R} , a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R} . Soit J un intervalle de \mathbb{R} inclus dans I et y une fonction définie sur J à valeurs réelles. On dit que y est une **solution sur J de l'équation différentielle d'ordre 1**

$$y' + ay = b$$

si y est dérivable sur J et pour tout $t \in J$:

$$y'(t) + ay(t) = b(t).$$

Théorème 4.1

Soient I un **intervalle** de \mathbb{R} , a et b deux fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R} . Soit A une primitive de a sur I .

- Les solutions sur I de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$t \in I \mapsto ce^{-A(t)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Soit y_0 une solution sur I de l'équation $y' + ay = b$. Alors les solutions de l'équation $y' + ay = b$ sont les fonctions de la forme :

$$t \in I \mapsto ce^{-A(t)} + y_0(t), \quad c \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème ci-dessus, pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1, il suffit de résoudre l'équation différentielle homogène associée et de trouver une solution particulière.

Méthode de variation de la constante. Il s'agit d'une méthode pour trouver une solution particulière de l'équation :

$$(E) \quad y' + ay = b.$$

En conservant les notations de l'énoncé du théorème, on cherche une solution sous la forme $t \mapsto c(t)e^{-A(t)}$ où c est une fonction à déterminer.

Le raisonnement suivant est à savoir refaire à chaque fois.

- **Analyse** : soit c une fonction dérivable sur I et supposons que $y : t \mapsto c(t)e^{-A(t)}$ est solution de l'équation (E) .

On a alors pour tout $t \in I$:

$$b(t) = y'(t) + ay(t) = c'(t)e^{-A(t)} - a(t)c(t)e^{-A(t)} + ac(t)e^{-A(t)} = c'(t)e^{-A(t)}.$$

Ainsi, c est une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I .

- **Synthèse** : on vérifie que si c est une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I alors $y : t \mapsto c(t)e^{-A(t)}$ est solution de l'équation (E) .

Il suffit alors de trouver une primitive c de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ pour en déduire une solution particulière de l'équation.

4.1.2 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 4.2

Soient a et b deux réels, I un intervalle et y une fonction définie sur I à valeurs réelles. On dit que y est une solution sur I de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

$$y'' + ay' + by = 0$$

si y est deux fois dérivable sur I et pour tout $t \in I$:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

Théorème 4.2

Soient a et b deux réels et considérons l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ (E) . L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue complexe r est appelée l'équation caractéristique de l'équation (E) .

- Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, notées r_1 et r_2 , alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si l'équation caractéristique possède une unique racine réelle, notées r_0 , alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $c \pm id$ alors les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda_1 e^{ct} \cos(dt) + \lambda_2 e^{ct} \sin(dt), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

4.2 Équations différentielle non linéaires d'ordre 1

4.2.1 Généralités

Définition 4.3 (Équation différentielle autonome)

Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I .

L'équation différentielle $y' = F(y)$ est appelée une **équation différentielle autonome d'ordre 1**.

- I est appelé l'intervalle de définition de l'équation différentielle.
- Une solution de cette équation est une fonction $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ définie et dérivable sur un intervalle J telle que :

$$\forall t \in J, \quad y'(t) = F(y(t)).$$

En particulier, une solution y est à valeurs dans I !

Remarque 4.1.

1. Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à **coefficients constants** est une équation différentielle autonome.

Soit $a, b \in \mathbb{R} : y' + ay = b \iff y' = F(y)$ où

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto -ax + b.$$

Pour dire les choses grossièrement, une équation différentielle autonome est une équation différentielle (pas nécessairement linéaire) dans laquelle les "coefficients" sont constants.

2. Soit $F : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un pavé $U \times I$.
L'équation différentielle $y' = F(t, y)$ est une équation différentielle d'ordre 1 (non-autonome).
Une solution de cette équation est une fonction $y : J \rightarrow I$ définie et dérivable sur un intervalle J inclus dans U telle que :

$$\forall t \in J, \quad y'(t) = F(t, y(t)).$$

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation différentielle de ce type : soit $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalle U ; alors $y' + ay = b \iff y' = F(t, y)$ où

$$F : (t, x) \in U \times \mathbb{R} \mapsto -a(t)x + b(t).$$

3. En général, lorsqu'on cherche à résoudre une telle équation (autonome ou non) on cherchera les solutions $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur un intervalle J **maximal** c'est-à-dire les solutions qu'on ne peut pas étendre à un intervalle strictement plus grand (pour l'inclusion) que J .

Définition 4.4 (Problème de Cauchy)

1. (Cas autonome) Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times I$.

On appelle **problème de Cauchy** en (t_0, y_0) la recherche d'une solution de l'équation différentielle

$$y' = F(y)$$

vérifiant de plus $y(t_0) = y_0$.

2. (Cas non autonome) Soit $F : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un pavé $U \times I$ et soit $(t_0, y_0) \in U \times I$.

On appelle **problème de Cauchy** en (t_0, y_0) la recherche d'une solution de l'équation différentielle

$$y' = F(t, y)$$

vérifiant de plus $y(t_0) = y_0$.

Remarque 4.2.

1. En général, un problème de Cauchy peut ne pas avoir de solution.
2. Cependant, sous certaines conditions (Hors-Programme) sur F , on peut montrer qu'un problème de Cauchy a toujours une solution maximale unique. C'est le cas si la fonction F est définie et classe C^1 sur un intervalle/pavé ouvert.

4.2.2 Méthode du changement de fonction

On s'intéresse à une équation différentielle de la forme

$$(E) \quad y' = F(t, y).$$

La méthode du changement de fonction inconnue consiste à introduire une nouvelle fonction inconnue $z = g(y)$ qui s'exprime en fonction de y par une fonction g bijective et dérivable donnée.

Comme $y = g^{-1}(z)$, on peut exprimer y' en fonction de z et z' puis, en reportant dans l'équation (E), obtenir une équation différentielle vérifiée par z .

En général, le changement de variable fait en sorte que cette nouvelle équation différentielle vérifiée par z soit facile à résoudre. On en déduit alors l'expression de z en la résolvant puis celle de y (car $y = g^{-1}(z)$).

4.2.3 Méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables consiste à se ramener à une équation de la forme :

$$(E') \quad y'(t)g(y(t)) = f(t)$$

où f et g sont des fonctions continues.

En notant G et F des primitives de g et f respectivement, l'équation (E') devient alors :

$$(G \circ y)'(t) = F'(t) \quad \text{c'est-à-dire} \quad G \circ y = F + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Si G est bijective, on peut alors en déduire $y : y = G^{-1}(F + c), c \in \mathbb{R}$.

4.3 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet d'approcher numériquement une solution d'un problème de Cauchy. Pour une explication du principe de la méthode, voir le diapo.

Cas autonome. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times I$ et on souhaite construire une approximation d'une solution de ce problème sur un intervalle $[t_0, T]$.

Définition 4.5 (Méthode d'Euler)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $t_k = t_0 + k \frac{T - t_0}{n}$ et on définit une suite $(y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{T - t_0}{n} F(y_k).$$

- l'entier n est le **nombre de subdivisions** de la méthode,
- le réel $\frac{T - t_0}{n}$ est le **pas**,
- la suite $(y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est la suite des approximations par la méthode d'Euler.

Exemple de programmation

```

1 def Euler(F, y0, t0, T, n):
2     '''
3     Entrées : F la fonction définissant l'équation différentielle
4               [t0, T] intervalle de définition d'une solution
5               y0 une condition initiale
6               n le nombre de subdivision
7     Sortie : approximation de la solution de y'=F(y)
8               sur [t0, T] telle que y(t0)=y0
9     '''
10    h=(T-t0)/n # pas
11    T=[t0]
12    Y=[y0]
13    for k in range(1, n+1):
14        Y.append(Y[-1]+h*F(Y[-1])) # liste des approximations
15        T.append(T[-1]+h)
16    return T, Y

```

Cas non-autonome. On s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $F : U \times I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $(t_0, y_0) \in U \times I$ et on souhaite construire une approximation d'une solution de ce problème sur un intervalle $[t_0, T]$.

Définition 4.6 (Méthode d'Euler)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $t_k = t_0 + k \frac{T - t_0}{n}$ et on définit une suite $(y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \quad y_{k+1} = y_k + \frac{T - t_0}{n} F(t_k, y_k).$$

- l'entier n est le **nombre de subdivisions** de la méthode,
- le réel $\frac{T - t_0}{n}$ est le **pas**,
- la suite $(y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est la suite des approximations par la méthode d'Euler.

Exemple de programmation

```

1 def Euler(F, y0, t0, T, n):
2     '''
3     Entrées : F la fonction définissant l'équation différentielle
4               [t0, T] intervalle de définition d'une solution
5               y0 une condition initiale
6               n le nombre de subdivision
7     Sortie : approximation de la solution de y'=F(t,y)
8               sur [t0, T] telle que y(t0)=y0
9     '''
10    h=(T-t0)/n    # pas
11    T=[t0]
12    Y=[y0]
13    for k in range(1, n+1):
14        Y.append(Y[-1]+h*F(T[-1], Y[-1]))    # liste des approximations
15        T.append(T[-1]+h)
16    return T, Y

```

Remarque 4.3. Sous certaines conditions sur F (dont la connaissance est Hors-Programme), la suite $(y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ des approximations par la méthode d'Euler porte bien son nom : y_k est une valeur approchée de $y(t_k)$. Plus précisément, sous ces conditions, l'erreur d'approximation commise :

$$e_n = \max\{|y_k - y(t_k)| ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En pratique, si on trace la représentation graphique de $(y_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ en fonction de $(t_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, plus n est grand plus la courbe obtenue va "coller" à la courbe représentative sur $[t_0, T]$ de la solution y du problème de Cauchy.