Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025–2026

BCPST2 – Mathématiques

DS3- 3h30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 - Cours

1. Résoudre l'équation différentielle : $(1+x^2)y'(x) - 2xy(x) = (1+x^2)^2$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 5y = 0$.
3. Factoriser le polynôme $P = 2X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 16X + 16$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$. On précisera la multiplicité de chaque racine.

Exercice 2 - Polynômes

Le but de cet exercice est de déterminer les polynômes **non nuls** de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient :

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1).$$

Attention : la notation $P(X^2-1)$ désigne une composée (de même pour $P(X+1)$ et $P(X-1)$). Ainsi, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P(X^2-1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^2-1)^k$.
Soit P un polynôme non nuls de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $(*)$.

1. Montrer que si a est une racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.
2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit une suite de nombres complexes en posant, pour tout $n \geq 0$: $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.
   (a) Montrer par récurrence que si a_0 est racine de P alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est racine de P.
   (b) Montrer que si a_0 est un réel strictement positif alors la suite (a_n) est une suite strictement croissante de nombres réels strictement positifs.
   (c) En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.
3. Déduire des questions précédentes que -1 n'est pas une racine de P.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

(b) Montrer que si $|a_0+1| \neq 1$ alors la suite $|a_n+1|$ est strictement monotone. On précisera le sens de monotonie.

5. Déduire des questions précédentes que si a est une racine complexe de P alors $|a+1| = 1$.
   On **admettra** qu'on a aussi $|a-1| = 1$.
6. Montrer que si P est non constant alors P a pour unique racine 0.
7. En déduire alors tous les polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

Problème – L'équation FKPP

Dans ce problème on s'intéresse à une équation différentielle introduite par Fisher, Kolmogorov, Petruski et Piskunov (FKPP) qui intervient dans de nombreux problèmes, allant de la propagation (dans le temps et l'espace) d'un allèle dans une population à la description de l'évolution du front de flamme lors d'une réaction chimique exothermique.

Soient D, r et K des constantes réelles *strictement positives*.

Une fonction $u : (x,t) \mapsto u(x,t)$ de deux variables réelles x (variable spatiale) et t (variable temporelle) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est dite solution de l'équation FKPP, avec coefficient de diffusivité D, constante de temps r et capacité du milieu K si

$$(\mathrm{FKPP}_1) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + ru(x,t)\left(1 - \frac{u(x,t)}{K}\right).$$

Le cas particulier où $D = r = K = 1$ sera appelé « équation FKPP réduite ».

La partie 1 contient des résultats indispensables pour les parties suivantes. Les parties suivantes sont essentiellement indépendantes les unes des autres.

Partie 1 – Résultats préliminaires

1. Soient a, b et c trois réels strictement positifs et u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On pose
   $$y = \frac{x}{a} \ ; \ s = \frac{t}{b}$$
   et v définie par
   $$\forall (y,s) \in \mathbb{R}^2,\ v(y,s) = cu(ay, bs) = cu(x,t).$$
   (a) Exprimer $\dfrac{\partial v}{\partial s}(y,s)$ et $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y,s)$ en fonction de $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

   (b) Donner des valeurs de a, b, c en fonction de D, r et K de sorte que :
   $$u \quad \text{solution de } \mathrm{FKPP}_1 \Longleftrightarrow v \quad \text{solution de } \mathrm{FPKP}_2$$
   où
   $$(\mathrm{FKPP}_2) \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v(1-v).$$

Désormais, on ne s'intéressera qu'à l'équation réduite que l'on notera ($\mathbf{FKPP_3}$).

2. On définit la fonction tanh, appelée la tangente hyperbolique, par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tanh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

(a) Justifier que tanh est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis étudier ses variations (on donnera son tableau de variations avec les limites aux bornes).

(b) Vérifier que $\tanh' = 1 - \tanh^2$.

(c) Justifier du fait que tanh définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
On note arctanh sa bijection réciproque.

(d) Montrer que arctanh est dérivable sur $]-1,1[$ et que

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

(e) Montrer que : $\forall y \in]-1,1[,\ \operatorname{arctanh}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Soit m une constante réelle *non nulle*. On considère l'équation différentielle :

$$(E_m) \quad z' = m(1-z^2).$$

3. Déterminer les solutions constantes de (E_m).

4. Soit z une solution de (E_m) sur un intervalle I non vide et non réduit à un point telle que : $\forall t \in I,\ z(t) \in]-1,1[$.

(a) En effectuant le changement de fonction $v = \operatorname{arctanh}(z)$ montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I, \quad z(t) = \tanh(m(t-t_0))$.

(b) Montrer que les fonctions ci-dessus sont solutions sur $\mathbb{R}$.

5. Soit z une solution de (E_m) sur un intervalle I non vide et non réduit à un point telle que : $\forall t \in I,\ z(t) \notin [-1,1]$.

(a) Montrer que :

— soit $\forall t \in I,\ z(t) > 1$;
— soit $\forall t \in I,\ z(t) < -1$.

(b) En effectuant le changement de fonction $v = z^{-1}$, montrer qu'il existe un réel $t_0 \notin I$ tel que

$$\forall t \in I, \quad z(t) = \frac{1}{\tanh(m(t-t_0))}.$$

(c) Vérifier que sur $]-\infty, t_0[$ et $]t_0, +\infty[$ les fonctions ci-dessus sont solutions.

Partie 2 – L'équation FKPP : cas stationnaire en espace

On cherche u, solution de l'équation (FKPP$_3$) telle que u ne dépend pas de la position spatiale x, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ u(x,t) = U(t)$$

6. Donner une équation différentielle dont U est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si u satisfait (FKPP$_3$).

7. En posant $V = 2U - 1$, montrer que U est solution de l'équation trouvée ci-dessus si et seulement si V est solution de (E_m) pour un m à déterminer.

8. Écrire une fonction `Euler(u0,t0,t1,n)` qui prend en entrées des réels `u0`, `t0` $<$ `t1` et un entier `n`$\in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la liste $(u_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenue par la méthode d'Euler pour approcher la solution U de l'équation de la question 6 sur [`t0`, `t1`] et vérifiant $U($`t0`$) =$ `u0`.

9. En supposant les variables `u0,t0,t1` déclarées, écrire un script permettant d'afficher une approximation du graphe de la solution U vérifiant $U($`t0`$) =$ `u0` sur l'intervalle [`t0`, `t1`].
On prendra $n = 100$.

Partie 2 – L'équation FKPP : solution en ondes progressives

On cherche u, solution de l'équation (FKPP_3) telle que u est une onde progressive, c'est-à-dire il existe une constante $c \neq 0$ et une fonction $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ u(x,t) = U(x - ct)$$

10. Montrer que u solution de l'équation (FKPP_3) si et seulement si U est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_f) : $\quad U'' + cU' + U(1-U) = 0$.

Dans le reste du sujet, on cherche des solutions de (E_f) sous la forme $U : x \mapsto P(\tanh(mx))$ où P est un polynôme à coefficients réels et $m \neq 0$ un réel.

11. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a alors :

$$U'(x) = m(1-\tanh(mx)^2)P'(\tanh(mx))$$

et

$$U''(x) = m(1-\tanh(mx)^2)\left[m(1-\tanh(mx)^2)P''(\tanh(mx)) - 2m\tanh(mx)P'(\tanh(mx))\right].$$

12. En conclure que U satisfait (E_f) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si le polynôme P vérifie :

$$(E_P) \quad m(1-X^2)\left[m(1-X^2)P'' + (c-2mX)P'\right] + P(1-P) = 0.$$

13. Soit P satisfaisant l'équation différentielle ci-dessus.

(a) Monter $\deg(P) \leq 2$.

(b) Montrer que $P(1)(1-P(1)) = 0$ et $P(-1)(1-P(-1)) = 0$.

(c) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que P appartient à l'ensemble :

$$\{a(X^2-1)\ ;\ a(X^2-1)+1\ ;\ a(X^2-1) - \frac{1}{2}(X-1)\ ;\ a(X^2-1) + \frac{1}{2}(X+1)\}.$$

(d) Pour chacun des cas énoncés à l'issue de la question précédente, écrire et résoudre le système de trois équations à trois inconnues c, m, a équivalent au fait que P satisfait (E_P).
Indication : question très calculatoire ; on commencera par factoriser $X^2 - 1$ dans le polynôme $P(X)(1-P(X))$.

(e) Conclure quant aux solutions de (E_P), de (E_f) et de (FKPP_3) trouvées par cette méthode.