

ESPACES VECTORIELS

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Structure d'espace vectoriel

5.1.1 Généralités

Théorème 5.1 (Exemple de référence : $\mathbb{K}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies ci-dessous est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- L'addition de deux éléments de $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n). \end{aligned}$$

- La multiplication d'un élément de $\mathbb{K}^n$ par un scalaire de $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\lambda, (x_1, \dots, x_n)) &\longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

L'élément neutre $0_{\mathbb{K}^n}$ est le vecteur nul.

Théorème 5.2 (Exemples de référence : espaces de polynômes)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les ensembles $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ munis des lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies au chapitre 3 sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

L'élément neutre $0_{\mathbb{K}[X]}$ (respectivement $0_{\mathbb{K}_n[X]}$) est le polynôme nul.

Théorème 5.3 (Exemple de référence : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies ci-dessous est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- L'addition de deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} + : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \end{aligned}$$

- La multiplication d'un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire de $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \end{aligned}$$

L'élément neutre $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ est la matrice nulle.

Théorème 5.4 (Exemple de référence : $\mathbb{K}^I$)

Soient I un intervalle. L'ensemble $\mathbb{K}^I$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies ci-dessous est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- L'addition de deux éléments de $\mathbb{K}^I$:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^I \times \mathbb{K}^I &\longrightarrow \mathbb{K}^I \\ (f, g) &\longmapsto (f + g : x \mapsto f(x) + g(x)) \end{aligned}$$

- La multiplication d'un élément de $\mathbb{K}^I$ par un scalaire de $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^I &\longrightarrow \mathbb{K}^I \\ (\lambda, f) &\longmapsto (\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x)) \end{aligned}$$

L'élément neutre $0_{\mathbb{K}^I}$ est la fonction nulle.

Théorème 5.5 (Exemple de référence : $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$)

L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire définies ci-dessous est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- L'addition de deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ ((u_n)_n, (v_n)_n) &\longmapsto (u_n + v_n)_n \end{aligned}$$

- La multiplication d'un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ par un scalaire de $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, (u_n)_n) &\longmapsto (\lambda u_n)_n \end{aligned}$$

L'élément neutre $0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ est la suite nulle.

5.1.2 Combinaisons linéaires et sous-espaces vectoriels

Définition 5.1 (Combinaison linéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ des éléments de E .

Un vecteur x de E est dit **combinaison linéaire** de $x_1, \dots, x_p$ s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_p \cdot x_p.$$

On appelle sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \dots, x_p$ et on note $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \dots, x_p$

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i ; \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \right\}.$$

Définition 5.2 (Sous-espace vectoriel)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E lorsque

1. F est non vide,
2. $\forall x \in F \forall y \in F, x + y \in F$ (*stabilité par addition*),
3. $\forall x \in F \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x \in F$ (*stabilité par multiplication par un scalaire*).

Proposition 5.1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

1. F est non vide,
2. $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, x + \lambda y \in F$.

Proposition 5.2

1. Tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
2. Toute intersection d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E .
3. Tout sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E .

5.2 Familles de vecteurs

5.2.1 Familles génératrices

Définition 5.3 (Famille génératrice)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E .

On dit qu'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de F ($n \in \mathbb{N}^*$) est **génératrice** de F si :

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n).$$

Cela signifie que tout vecteur de F peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$.

5.2.2 Familles libres

Définition 5.4 (Famille libre/liée)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est dite **libre** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

- Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Faits importants sur les familles liées

- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- Toute famille contenant plusieurs fois le même vecteur est liée.

- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Faits importants sur les familles libres

- Une famille constituée d'un **seul vecteur** est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- Deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel E sont dits **colinéaires** s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.
Une famille constituée de **deux vecteurs** est libre si et seulement si ces vecteurs ne sont pas colinéaires.
- Une famille de polynômes **non nuls** de degrés **distincts** est libre. Une telle famille est appelée une famille **échelonnée** de polynômes.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

5.2.3 Bases

Définition 5.5 (Base)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit qu'une famille de vecteurs de E est une **base** de E si elle est libre et génératrice de E .

Définition 5.6 (Proposition/Définition : coordonnées dans une base)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_p)$ une base de E .

Pour tout $u \in E$, il existe un unique p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés les **coordonnées** de u dans la base $(u_1, \dots, u_p)$.

Exemples de référence : base canonique et coordonnées : soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Base canonique de $\mathbb{K}^n$.

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la famille constituée des vecteurs

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Les coordonnées d'un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique sont $(x_1, \dots, x_n)$ car

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

2. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient d'indices (i, j) qui vaut 1.

Les coordonnées d'une matrice $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans la base canonique sont $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

3. Base canonique de $\mathbb{K}_n[x]$.

La base canonique de $\mathbb{K}_n[x]$ est la famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ dans la base canonique sont $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.