

ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Dimension

6.1.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 6.1 (Espace vectoriel de dimension finie)

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Exemples de référence. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

Proposition 6.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul.
De toute famille génératrice de E on peut extraire une sous-famille qui est une base de E .

6.1.2 Dimension

Définition 6.2 (Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit au vecteur nul.
Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.
Le cardinal commun à toutes les bases de E est un entier naturel non nul appelé **dimension de E** et noté $\dim(E)$.
Par convention, la dimension d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel réduit au vecteur nul est 0.

Exemples de référence.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$;
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$;
3. Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Proposition 6.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E .
Alors :

1. F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ;
2. $\dim(F) \leq \dim(E)$;
3. $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

6.1.3 Famille de vecteurs et dimension

Proposition 6.3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de vecteurs de E .
Alors $\text{Card}(\mathcal{G}) \geq n$. De plus, si $\text{Card}(\mathcal{G}) = n$ alors $\mathcal{G}$ est une base de E .
2. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de E .
Alors $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq n$. De plus, si $\text{Card}(\mathcal{L}) = n$ alors $\mathcal{L}$ est une base de E .
3. Toute famille libre peut se compléter en une base de E .

6.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 6.3 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **rang** de cette famille, et on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_n)$, la dimension de l'espace vectoriel $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Proposition 6.4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

1. $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
2. $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) \leq n$ avec égalité si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.
3. Le rang d'une famille de vecteurs reste inchangé si :
 - on change l'ordre des vecteurs,
 - on multiplie un des vecteurs par un scalaire **non nul**,
 - on retire de la famille un vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres,
 - on ajoute à l'un des éléments de la famille une combinaison linéaire des autres.

En pratique : soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{B}$ une base de E .

1. Soit $u \in E$ et notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. On appelle

matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

2. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E . On appelle **matrice de $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$** et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j -ième colonne est la $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$.

Alors le rang de $(u_1, \dots, u_p)$ est égal au rang de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.