Chapitre 7

Séries numériques

7.1 Séries numériques

7.1.1 Définition et propriétés

Définition 7.1

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique.
On appelle **série numérique de terme général** u_n et on note $\sum_{n\geq n_0} u_n$ la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est aussi appelée **la suite des sommes partielles** de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

— On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge.

— On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ **diverge** si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ diverge.

Remarque 7.1.

1. Les séries étant des suites particulières, toutes les techniques d'étude de ces dernières peuvent s'appliquer aux séries.
2. On ne change pas la nature d'une série en commençant la somme à partir d'un certain rang (mais on change la somme lorsqu'il y a convergence).

Proposition 7.1

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série numérique.
Si la série est convergente alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 0.

Attention : la réciproque est fausse !

Proposition 7.2

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries numériques et soit λ, μ deux réels.
Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ convergent alors la série $\sum_{n\geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

7.1.2 Exemples de référence

Proposition 7.3 (Séries de Riemann)

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
2. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Proposition 7.4 (Séries géométriques)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Les séries $\sum_{k\geq 0} q^k$, $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas, on a

- $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,
- $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$,
- $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Proposition 7.5 (Séries exponentielles)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est convergente de somme e^x.

7.2 Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

Une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est à **termes positifs** si $u_k \geq 0$ pour tout $k \geq n_0$.

Proposition 7.6

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série à **termes positifs**. Alors la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles est croissante. En particulier

- si $(S_n)_{n\geq n_0}$ est majorée, la série est convergente ;
- si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, la série diverge vers $+\infty$.

Proposition 7.7 (Comparaison des séries à termes positifs et relation d'ordre)

Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries à **termes positifs**. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n.$$

1. Si $\sum_{n\geq n_0} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente.
2. Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est divergente alors $\sum_{n\geq n_0} v_n$ est divergente.

Proposition 7.8 (Théorème d'équivalence)

Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries à **termes positifs**. Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{n\geq n_0} v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.

7.3 Convergence absolue

Définition 7.2 (Convergence absolue)

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série numérique. On dit que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est **absolument convergente** (ou converge absolument) si la série $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$ converge.

Proposition 7.9

Soit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série numérique. Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a :

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|.$$