Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS3- Correction

Exercice 1

Soit également S l'ensemble défini par :

$$S = \{f \in E \mid f''' - 2f'' + 2f' = 0\}.$$

1. — La fonction nulle est dans S donc S est non vide.
— Soient f_1, f_2 deux éléments de S. Comme f_1, f_2 sont dans S, elles sont trois fois dérivables donc $f_1 + \lambda f_2$ l'est aussi et on a par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}(f_1+\lambda f_2)''' - 2(f_1+\lambda f_2)'' + 2(f_1+\lambda f_2)' &= f_1''' + \lambda f_2''' - 2f_1'' - 2\lambda f_2'' + 2f_1' + \lambda f_2' \\ &= f_1''' - 2f_1'' + 2f_1' + \lambda(f_2''' - 2f_2'' + 2f_2').\end{aligned}$$

Or f_1 et f_2 sont des éléments de S donc :

$$f_1''' - 2f_1'' + 2f_1' = 0 \quad \text{et} \quad f_2''' - 2f_2'' + 2f_2' = 0.$$

Par conséquent :

$$(f_1+\lambda f_2)''' - 2(f_1+\lambda f_2)'' + 2(f_1+\lambda f_2)' = 0$$

ce qui prouve que $f_1 + \lambda f_2 \in S$.

On a donc montré que S est un sous-ensemble non vide de E stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. Soient a, b deux réels. On définit trois fonctions u, v, w sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = e^{ax}\cos(bx) \quad ; \quad w(x) = e^{ax}\sin(bx).$$

(a) On suppose $b = 0$. Alors $w = 0$ donc la famille (u, v, w) est liée.

(b) On suppose $b \neq 0$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_3$ des réels tels que :

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x) + \lambda_3 w(x) = 0.$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En considérant $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{b}$ et $x = \dfrac{\pi}{2b}$, on obtient que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifie :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - e^{\frac{a\pi}{b}}\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + e^{\frac{a\pi}{2b}}\lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ (1+e^{\frac{a\pi}{b}})\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1+e^{\frac{a\pi}{2b}}\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

La famille (u,v,w) est donc libre.

3. (a) D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $x \mapsto e^x\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto \int_0^x e^t\cos(t)dt$ est une primitive de $x \mapsto e^x\cos(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \cos(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t\cos(t)dt &= [e^t\cos(t)]_0^x - \int_0^x e^t(-\sin(t))dt \\ &= e^x\cos(x) - 1 + \int_0^x e^t\sin(t)dt.\end{aligned}$$

Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc par intégration par partie à nouveau :

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t\cos(t)dt &= e^x\cos(x) - 1 + \int_0^x e^t\sin(t)dt \\ &= e^x\cos(x) - 1 + [e^t\sin(t)]_0^x - \int_0^x e^t\cos(t)dt \\ &= e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - 1 - \int_0^x e^t\cos(t)dt.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$2\int_0^x e^t\cos(t)dt = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - 1.$$

On en déduit que $x \mapsto \frac{1}{2}e^x(\cos(x)+\sin(x))$ est une primitive de $x \mapsto e^x\cos(x)$.

De même, on montre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^x(-\cos(x)+\sin(x))$ est une primitive de $x \mapsto e^x\sin(x)$.

(b) — **Analyse :** soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0.$$

En posant $z = y'$ alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = y'''(x) - 2y''(x) + 2y'(x) = z''(x) - 2z'(x) + 2z(x).$$

Donc z est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

Le discriminant Δ vaut : $\Delta = 4 - 8 = -4$.

Les racines sont : $\dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.
Ainsi il existe des constantes A et B telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) = z(x) = Ae^x \cos(x) + Be^x \sin(x).$$

En utilisant la question précédente, on peut primitiver pour obtenir :

$$y(x) = \frac{A}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x)) + \frac{B}{2}e^x(\sin(x) - cos(x)) + c$$

où $c \in \mathbb{R}$. En posant $a = \dfrac{A}{2} - \dfrac{B}{2}$ et $b = \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c.$$

— **Synthèse :** on vérifie que les fonctions de la forme $y : x \mapsto ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c$ avec a, b, c des réels vérifient bien l'équation demandée (sur une copie il faut le faire réellement ! !).

Ainsi les solutions de l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0$$

sont les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c \qquad \text{où} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

(c) D'après la question précédente :

$$S = \text{Vect}(x \mapsto e^x \cos(x), x \mapsto e^x \sin(x), x \mapsto 1).$$

La famille $(x \mapsto e^x \cos(x), x \mapsto e^x \sin(x), x \mapsto 1)$ est donc une famille génératrice de S.
De plus d'après la question **2.(b)**, c'est une famille libre.
Ainsi il s'agit d'une base de S et donc S est de dimension 3.

4. (a) On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(P) \qquad y''' - 2y'' + 2y' = e^{2x}.$$

(b) Soit un réel a. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y_a'''(x) - 2y_a''(x) + 2y_a'(x) = 8ae^{2x} - 8ae^{2x} + 4ae^{2x} = 4ae^{2x}.$$

Donc en prenant $a = \dfrac{1}{4}$ on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a'''(x) - 2y_a''(x) + 2y_a'(x) = e^{2x}.$$

(c) Il n'y aucun résultat de cours sur ce genre d'équation d'ordre de 3. Il faut donc redémontrer dans ce cas que toute solution s'écrit sous forme « solution de l'équation homogène » + « solution particulière ». Soit y une solution de (E)

et y_a la solution particulière de la question précédente. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
&(y-y_a)'''(x) - 2(y-y_a)''(x) + 2(y-y_a)'(x) \\
&= y'''(x) - 2y''(x) + 2y'(x) - (y_a'''(x) - 2y_a''(x) + 2y_a'(x)) \\
&= e^{2x} - e^{2x} = 0.
\end{aligned}$$

Donc $y - y_a$ est dans S et il existe donc a, b, c des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) - y_a(x) = ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c$$

c'est-à-dire

$$y(x) = ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c + \frac{1}{4}e^{2x}.$$

Réciproquement, on vérifie que si y est de la forme

$$y : x \mapsto ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c + \frac{1}{4}e^{2x}$$

avec a, b, c des réels alors y est solution de (P).
Les solutions de (P) sont donc les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c + \frac{1}{4}e^{2x}$$

avec a, b, c des réels.

(d) La fonction nulle n'est pas solution de (P) donc non.

Problème

Partie I-La fonction arccos

On note g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad g(x) = \cos(x).$$

1. La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ d'après le théorème de la bijection continue, g réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $I = [g(\pi), g(0)] = [-1, 1]$.
On notera désormais arccos la bijection réciproque de g.

2. **(a)** Il s'agit de trouver l'unique $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
Ainsi $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.
De même $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ est l'unique $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Donc $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

(b) Comme arccos est la bijection réciproque de g on a :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(g(x)) = x \quad \text{càd} \quad \arccos(\cos(x)) = x.$$

Cela n'est pas le cas si $x \notin [0, \pi]$! Par exemple :

$$\cos(2\pi) = 1 \quad \text{donc} \quad \arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0.$$

De même, g est la bijection réciproque de arccos donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x.$$

3. Soit $x \in [-1, 1]$. On a :

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

donc :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad \sin(\arccos(x)) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Or $\arccos(x) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\arccos(x))$ est positif. Ainsi :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

4. La fonction g est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$ on a :

$$g'(x) = -\sin(x).$$

Ainsi pour tout $x \in]0, \pi[$, $g'(x) \neq 0$. D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on en déduit que arccos est dérivable en tout $x \in [-1, 1]$ tel que $\arccos(x) \notin \{0, \pi\}$ c'est-à-dire sur $]-1, 1[$. De plus on a :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad , \arccos'(x) = \frac{1}{g'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. (a) D'après les DL usuels :

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)).$$

(b) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ étant de classe C^2 sur $]-1, 1[$ la formule de Taylor appliquée à f donne :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

En comparant avec le DL ci-dessus on en déduit par unicité :

$$f(0) = -1 \quad ; \quad f'(0) = 0 \quad ; \quad f''(0) = -1.$$

Or $f = \arccos'$ donc arccos est de classe C^3 et on a :

$$\arccos'(0) = -1 \quad ; \quad \arccos''(0) = 0 \quad ; \quad \arccos'''(0) = -1.$$

D'après la formule de Taylor appliqué à arccos, on a donc :

$$\begin{aligned}\arccos(x) &= \arccos(0) + \arccos'(0)x + \frac{\arccos''(0)}{2} + \frac{\arccos'''(0)}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\\ &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).\end{aligned}$$

6. L'intégrande est une fonction continue sur $]-1,1[$ donc l'intégrale est généralisée en -1 et en 1.

— Intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Soit $A \in]-1,0]$. D'après la question **5**, on a :

$$\begin{aligned}\int_{A}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt &= [-\arccos(t)]_A^0 = -\arccos(0) + \arccos(A)\\ &\xrightarrow[A\to -1]{} -\arccos(0) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi.\end{aligned}$$

Le passage à la limite est licite car la fonction arccos est continue sur $[-1,1]$ d'après le théorème de la bijection. Donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

— Intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Soit $A \in [0,1[$. D'après la question **5**, on a :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{A} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt &= [-\arccos(t)]_0^A = -\arccos(A) + \arccos(0)\\ &\xrightarrow[A\to 1]{} -\arccos(1) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente et :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi.$$

Partie II-Une suite de polynômes définies à l'aide de arccos

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$\forall x \in [-1,1], \quad p_n(x) = \cos(n\arccos(x)).$$

7. Pour tout $x \in [-1,1]$ on a :

$$p_0(x) = \cos(0 \times \arccos(x)) = \cos(0) = 1 \;;$$

$$p_1(x) = \cos(1 \times \arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = x \;;$$

$$p_2(x) = \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1.$$

8. **(a)** Soient a, b deux réels. On a :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) + \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\ &= 2\cos(a)\cos(b).\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$. On a d'après 8a

$$\begin{aligned}p_{n+2}(x) &= \cos((n+2)\arccos(x))\\ &= \cos((n+1)\arccos(x) + \arccos(x))\\ &= 2\cos((n+1)\arccos(x))\cos(\arccos(x)) - \cos((n+1)\arccos(x) - \arccos(x))\\ &= 2p_{n+1}(x)x - p_n(x).\end{aligned}$$

(c) Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et coefficient dominant 2^{n-1} tel que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad p_n(x) = T_n(x).$$

— **Initialisation** : d'après la question 7, on a $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.

— **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe deux polynômes T_n et T_{n+1} de degré respectif n et $n+1$ et de coefficient dominant respectif 2^{n-1} et 2^n tels que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad p_n(x) = T_n(x) \quad \text{et} \quad p_{n+1}(x) = T_{n+1}(x).$$

Alors d'après 8b pour tout $x \in [-1,1]$ on a :

$$p_{n+2}(x) = 2xp_{n+1}(x) - p_n(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Ainsi en posant $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, le polynôme T_{n+2} convient.
De plus, le degré et le coefficient de T_{n+2} sont alors ceux de $2XT_{n+1}$ à savoir $n+1$ et 2^{n+1}.

— **Conclusion :** par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} tel que :

$$\forall x \in [-1,1], \quad p_n(x) = T_n(x).$$

Les polynômes $(T_n)_n$ vérifient la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Attention, cette question est plus dure qu'elle n'y parait car :

$$\arccos(\cos(\theta)) \neq \theta!$$

Par exemple :

$$\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi.$$

En fait $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$ seulement pour $\theta \in [0,\pi]$.

— **Méthode 1** : Soit $\theta \in [0,\pi]$ comme $\cos(\theta) \in [-1,1]$ alors on a :

$$T_n(\cos(\theta)) = p_n(\cos(\theta)) = \cos(n \arccos(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Maintenant, si $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_0 = \pm(\theta + 2k\pi) \in [0,\pi]$ et $\cos(\theta) = \cos(\theta_0)$ et on a donc :

$$T_n(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta_0)) = \cos(n\theta_0) = \cos(n\theta).$$

— **Méthode 2 :** par récurrence double.
L'initialisation découle de la question 7. Pour l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$. Alors d'après la question 8a on a :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta). \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$T_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \theta = \frac{2k+1}{2n}\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ est une racine de T_n.

Or pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{2k+1}{2n}\pi \in [0,\pi]$ et la fonction cos est bijective sur $[0,\pi]$. Ainsi on a n racines distinctes de T_n avec :

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad , \quad k \in [\![0, n-1]\!].$$

Comme T_n est de degré n, ce sont les seuls.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) La famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est famille de polynômes non nuls de degré échelonné. Donc c'est une famille libre.

(b) Il s'agit d'une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

11. **(a)** Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. D'après 8a,on a :

$$\int_0^\pi \cos(mt)\cos(nt)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t))dt.$$

— Si $m = n = 0$ on a alors $\int_0^\pi \cos(mt)\cos(nt)dt = \int_0^\pi 1dt = \pi$.

— Si $m = n > 0$ on a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(mt)\cos(nt)dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2mt) + 1)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2mt)}{2m} + t\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

— Si $m \neq n$ on alors :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(mt)\cos(nt)dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t))dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)t)}{n+m} + \frac{\sin((m-n)t)}{m-n}\right]_0^\pi \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) La fonction $t : x \mapsto \arccos(x)$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $]-1,1[$. De plus :

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_{-1}^1 T_n(\cos(t(x)))T_m(\cos(t(x)))t'(x)dx.$$

Comme $t(-1)=\pi$ et $t(1)=0$, d'après la formule de changement de variable, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ est de même nature que $\displaystyle -\int_{\pi}^{0} T_n(\cos(t))T_m(\cos(t))dt$ et en cas de convergence, sont égales.
Or d'après les questions précédentes :

$$-\int_{\pi}^{0} T_n(\cos(t))T_m(\sin(t))dt = \int_{0}^{\pi} T_n(\cos(t))T_m(\cos(t))dt = \int_{0}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt$$

est convergente. Finalement $\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ converge et vaut

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m\neq n \\ \pi & \text{si} \quad m=n=0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad m=n>0 \end{cases}.$$

Partie III-Étude d'une suite

On considère dans cette partie la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0=0 \quad ; \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad x_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+x_n)}.$$

12. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie la liste $[x_0,\dots,x_n]$:

```
def fonction_pb(n):
        x = 0
        L=[]
        for k in range(n+1):
                L.append(x)
                x = np.sqrt(1/2*(1+x))
        return L
```

13. **(a)** Par récurrence :

- **Initialisation :** $x_0=0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $x_n\in[0,1]$. On a alors

$$0\leq \frac{1}{2}(1+x_n)\leq \frac{1}{2}(1+1)=1$$

puis par croissance stricte de la fonction racine carrée :

$$0\leq x_{n+1}\leq 1.$$

- **Conclusion :**pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in[0,1]$.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$, la fonction arccos étant définie sur $[-1,1]$ d'après la question précédente $u_n=\arccos(x_n)$ est bien définie et dans $[0,\pi]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que d'après **2b**, $\cos(u_n) = x_n$ donc :

$$u_{n+1} = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos(u_n))}\right).$$

Or on sait que $\cos^2\left(\frac{u_n}{2}\right) = \frac{1+\cos(u_n)}{2}$ donc

$$u_{n+1} = \arccos\left(\sqrt{\cos^2\left(\frac{u_n}{2}\right)}\right) = \arccos\left(\left|\cos\left(\frac{u_n}{2}\right)\right|\right).$$

Or $\frac{u_n}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc son cosinus est positif ainsi :

$$u_{n+1} = \arccos\left(\cos\left(\frac{u_n}{2}\right)\right).$$

Enfin, comme $\frac{u_n}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0,\pi]$ on a :

$$u_{n+1} = \arccos\left(\cos\left(\frac{u_n}{2}\right)\right) = \frac{u_n}{2}.$$

En particulier, (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(d) Comme (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2^n}u_0 = \frac{1}{2^n}\arccos(0) = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \cos(u_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

14. **(a)** D'après la question précédente et la continuité de cos en 0 on en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\cos(0) = 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_n - \ell = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $w_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\prod_{i=1}^{n+1} x_i \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) x_{n+1}\prod_{i=1}^{n} x_i \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) w_n \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) w_n \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) w_n.
\end{aligned}$$

Ainsi la suite $\left(w_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(b) D'après la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} w_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

Or on sait que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

donc :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}$$

Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{2}{\pi}$.