Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025–2026

BCPST2 – Mathématiques

DS3- 3H30

Exercice 1 - Cours

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2>0$ donc l'équation différentielle est équivalente à :

$$y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = (1+x^2).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

— **Résolution de l'équation différentielle homogène associée.** Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -\ln(1+x^2)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{\ln(1+x^2)}\ ;\ C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto C(1+x^2)\ ;\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

— **Solution particulière.** On cherche une solution particulière $y_P : x \mapsto C(x)(1+x^2)$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
y_p \quad \text{solution} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y_P(x) = (1+x^2)\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x)(1+x^2) + 2xC(x) - \frac{2x}{1+x^2}C(x)(1+x^2) = (1+x^2)\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x)(1+x^2) = (1+x^2)\\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad C'(x) = 1.
\end{aligned}$$

On vérifie alors que $y_P : x \mapsto x(x^2+1)$ est solution.

— **Conclusion :** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$\left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto (C+x)(1+x^2)\ ;\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Il s'agit d'une équation différentielle homogène linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique $r^2-4r+5=0$ a pour discriminant $\Delta=-4$ et pour racines :

$$r_1 = 2+i \quad ; \quad r_2 = 2-i.$$

L'ensemble S des solutions de l'équation différentielle est donc :

$$\begin{aligned}
S &= \left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\mathrm{Re}(r_1)x}(A\cos(\mathrm{Im}(r_1)x) + B\sin(\mathrm{Im}(r_1)x)\ ;\ A, B \in \mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)\ ;\ A, B \in \mathbb{R}\right\}.
\end{aligned}$$

3. On constate que 2 est racine évidente de P.
De plus, $P'(2)=0$ donc 2 est une racine de multiplicité au moins 2 de P. Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P = (X-2)^2 Q.$$

Déterminons Q.

— **Méthode 1 : par division euclidienne.** On trouve $Q = 2X^2 + 4$.
— **Méthode 2 : par identification.** On a :

$$4 = \deg(P) = 2 + \deg(Q)$$

donc Q est de degré 2 : $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $Q = aX^2 + bX + c$.
Alors

$$\begin{aligned} P = (X-2)^2 Q &\iff P = aX^4 + (b-4a)X^3 + (c+4a-4b)X^2 + (4b-4c)X + 4c \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 2 \\ b-4a & = & -8 \\ c+4a-4b & = & 12 \\ 4b-4c & = & -16 \\ 4c & = & 16 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 2 \\ b & = & 0 \\ c & = & 4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi $Q = 2X^2 + 4$.

On obtient :

$$\begin{aligned} P &= 2(X-2)^2(X-i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2}) \quad (\text{dans } \mathbb{C}[X]) \\ &= 2(X-2)^2(X^2+2) \quad (\text{dans } \mathbb{R}[X]) \end{aligned}$$

2 est de multiplicité 2 et les deux autres racines complexes sont simples.

Exercice 2 - Polynômes

Le but de cet exercice est de déterminer les polynômes **non nuls** de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient :

$$(*) \qquad P(X^2-1) = P(X-1)P(X+1).$$

Attention : la notation $P(X^2-1)$ désigne une composée (de même pour $P(X+1)$ et $P(X-1)$). Ainsi, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P(X^2-1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^2-1)^k$.

Soit P un polynôme non nuls de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation $(*)$.

1. Soit a un racine de P. En évaluant la relation $(*)$ en $a+1$ on obtient :

$$P((a+1)^2-1) = P(a+1-1)P(a+1+1) = P(a)P(a+2) = 0.$$

De même :

$$P((a-1)^2-1) = P(a-1-1)P(a-1+1) = P(a-2)P(a) = 0.$$

Ainsi $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.

2. Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit une suite de nombres complexes en posant, pour tout $n \geq 0$: $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

(a) On suppose que a_0 est racine de P. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est racine de P.

— **Initialisation :** vraie par hypothèse.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons a_n racine de P. Comme on a

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n = (a_n + 1)^2 - 1$$

alors par la question précédente, a_{n+1} est racine de P.

— **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est racine de P.

(b) Soit a_0 est un réel strictement positif, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

— **Initialisation :** vraie par hypothèse.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Comme on a

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$$

alors a_{n+1} est somme de deux réels strictement positifs donc est un réel strictement positif.

— **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est un réel strictement positif.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + a_n > 0.$$

Ainsi (a_n) est une suite strictement croissante.

(c) Supposons que P possède une racine réelle strictement positive a et soit (a_n) la suite définie par :

$$a_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n.$$

Alors (a_n) est strictement croissante donc en particulier, ses termes sont deux à deux distincts.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est racine de P.

Donc P admet une infinité de racines : cela contredit le fait que P est supposé non nul.

Ainsi, P ne possède pas de racine réelle strictement positive.

3. Supposons -1 racine de P. Alors par la question 1, $(-1-1)^2 - 1 = 3$ est racine de P. Cela contredit la question 2.(c).

4. (a) Par récurrence.

— **Initialisation :** évident.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$. Alors on a

$$a_{n+1} + 1 = a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2 = \left((a_0 + 1)^{2^n}\right)^2 = (a_0 + 1)^{2^{n+1}}.$$

— **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0 + 1)^{2^n}$.

(b) **L'énoncé était ici incomplet** : il faut aussi supposer $|a_0 + 1| \neq 0$.

— **Cas 1 :** si $0 < |a_0+1| < 1$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_{n+1}+1| = (|a_0+1|^{2^n})^2 < |a_0+1|^{2^n} = |a_n+1|.$$

La suite $(|a_n+1|)$ est strictement décroissante.

— **Cas 2 :** si $1 < |a_0+1|$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_{n+1}+1| = (|a_0+1|^{2^n})^2 > |a_0+1|^{2^n} = |a_n+1|.$$

La suite $(|a_n+1|)$ est strictement croissante.

5. Soit a une racine de P. D'après 3), $a \neq -1$ donc $|a+1| > 0$.
On considère la suite (a_n) définie à la question 2.(c).
Si $|a+1| \neq 1$, on alors d'après la question précédente, les $|1+a_n|$ sont deux à deux distincts donc les a_n aussi. Par conséquent, P a une infinité de racines ; cela contredit la fait qu'il est non nul.
Donc nécessairement $|a+1| = 1$.

6. Soit P non constant. Par le théorème de d'Alembert Gauss, il possède une racine $a \in \mathbb{C}$.
D'après ce qui précède, on a $|a+1| = 1 = |a-1|$: autrement dit, a est sur le cercle de centre 1 et de rayon 1 et sur le cercle de centre -1 et de rayon 1. Donc $a = 0$.

7. — Analyse : Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifie la relation $(*)$. D'après ce qui précède :

— soit P est constant ;

— soit P possède 0 comme unique racine et d'après le corollaire du théorème de d'Alembert-Gauss, il existe $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$P = cX^n.$$

En regroupant ces deux cas, il existe $c \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$P = cX^n.$$

— Synthèse : soit $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et posons $P = cX^n$. Alors

$$P(X^2-1) = c(X^2-1)^n \quad \text{et} \quad P(X-1)P(X+1) = c^2(X^2-1)^n.$$

Donc P vérifie $(*)$ si et seulement si $c^2 = c$ si et seulement si $c = 1$ (car P est non nuls donc $c \neq 0$).

— Conclusion : les polynômes non nuls vérifiant $(*)$ sont les polynômes X^n, $n \in \mathbb{N}$.

Problème – L'équation FKPP

Soient D, r et K des constantes réelles *strictement positives*.

Une fonction $u : (x,t) \mapsto u(x,t)$ de deux variables réelles x (variable spatiale) et t (variable temporelle) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est dite solution de l'équation FKPP, avec coefficient de diffusivité D, constante de temps r et capacité du milieu K si

$$(\mathrm{FKPP}_1) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + ru(x,t)\left(1 - \frac{u(x,t)}{K}\right).$$

Le cas particulier où $D = r = K = 1$ sera appelé « équation FKPP réduite ».

Partie 1 – Résultats préliminaires

1. Soient a, b et c trois réels strictement positifs et u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On pose

$$y = \frac{x}{a}\ ;\ s = \frac{t}{b}$$

et v définie par

$$\forall (y,s)\in\mathbb{R}^2,\ v(y,s) = cu(ay,bs) = cu(x,t).$$

(a) Soit $(y_0,s_0)\in\mathbb{R}^2$.

La dérivée partielle $\frac{\partial v}{\partial s}(y_0,s_0)$ est la dérivée en s_0 de

$$v_{y=y_0} : s\mapsto v(y,s) = cu(ay_0,bs) = cu_{x=ay_0}(bs).$$

Par dérivée de fonctions composées :

$$v'_{y=y_0}(s_0) = cbu'_{x=ay_0}(bs_0) = cb\frac{\partial u}{\partial t}(ay_0,bs_0).$$

Ainsi

$$\frac{\partial v}{\partial s}(y_0,s_0) = cb\frac{\partial u}{\partial t}(ay_0,bs_0).$$

En d'autres termes, pour tout $(y,s)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial v}{\partial s}(y,s) = cb\frac{\partial u}{\partial t}(ay,bs) = cb\frac{\partial u}{\partial t}(x,t).$$

De même, on obtient pour tout $(y,s)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y,s) = ca^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

(b) Soit a, b, c des réels.

$$\begin{aligned}
v\quad\text{solution de FPKP}_2 &\iff \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v(1-v)\\
&\iff cb\frac{\partial u}{\partial t} = ca^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu(1-cu)\\
&\iff \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{b}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{b}u(1-cu)
\end{aligned}$$

l'avant dernière équivalence étant due au fait que $(y,s)\mapsto(x,t)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$.

On en déduit que

$$u\quad\text{solution de FKPP}_1 \iff v\quad\text{solution de FPKP}_2$$

lorsque

$$D = \frac{a^2}{b}\quad ;\quad \frac{1}{b} = r\quad ;\quad \frac{1}{c} = K$$

c'est-à-dire

$$c = \frac{1}{K}\quad ;\quad b = \frac{1}{r}\quad ;\quad a = \sqrt{\frac{D}{r}}.$$

Désormais, on ne s'intéressera qu'à l'équation réduite que l'on notera ($\mathbf{FKPP_3}$).

2. On définit la fonction tanh, appelée la tangente hyperbolique, par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \tanh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

(a) Les fonctions $t \mapsto e^t - e^{-t}$ et $t \mapsto e^t + e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la deuxième ne s'annule pas donc par quotient, tanh est classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\tanh'(t) = \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2} = \frac{4}{(e^t + e^{-t})^2} > 0.$$

Ainsi tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\tanh(t) = \frac{e^t(1 - e^{-2t})}{e^t(1 + e^{-2t})} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$$

— Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\tanh(t) = \frac{e^{-t}(e^{2t} - 1)}{e^{-t}(1 + e^{2t})} = \frac{e^{2t} - 1}{1 + e^{2t}} \xrightarrow[t \to -\infty]{} -1$$

(b) On a vu que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\tanh'(t) = \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2} = 1 - \tanh(t)^2.$$

(c) D'après la question 2.(a), tanh est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection continue, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$\left]\lim_{t\to-\infty} \tanh(t), \lim_{t\to+\infty} \tanh(t)\right[=]-1, 1[.$$

On note arctanh sa bijection réciproque.

(d) D'après le théorème de dérivation des bijections réciproque arctanh est dérivable sur $\{y \in]-1,1[\mid \tanh'(\arctan(y)) \neq 0\}$.

Or, pour tout $y \in]-1,1[$ on a :

$$\tanh'(\arctan(y)) = 1 - \tanh(\arctan(y))^2 = 1 - y^2 \neq 0.$$

Ainsi arctanh est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{\tanh'(\arctan(y))} = \frac{1}{1-y^2}.$$

(e) — **Méthode 1 :** soit $f : y \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. On vérifie facilement que f est dérivable et que :

$$\forall y \in]-1,1[, \quad f'(y) = \frac{1}{1-y^2}.$$

Ainsi f et arctanh sont deux primitives de $y \mapsto \dfrac{1}{1-y^2}$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\text{arctanh} = c + f.$$

En regardant en $y = 0$ on a alors :

$$0 = \text{arctanh}(0) = c + f(0) = c.$$

Ainsi $f = \text{arctanh}$.

— **Méthode 2 :** soit $y \in]-1, 1[$ et $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\tanh(t) = y \iff \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = y &\iff (e^t + e^{-t})y = e^t - e^{-t} \\ &\iff (e^{2t} + 1)y = e^{2t} - 1 \\ &\iff e^{2t}(y-1) = -y - 1 \\ &\iff e^{2t} = \frac{1+y}{1-y} \\ &\iff t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).\end{aligned}$$

Soit m une constante réelle *non nulle*. On considère l'équation différentielle :

$$(E_m) \quad z' = m(1 - z^2).$$

3. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $z : t \mapsto c$ une fonction constante.

$$z \text{ solution de } (E_m) \iff z' = m(1 - c^2) \iff 0 = m(1 - c^2) \iff c \in \{1 - 1\}$$

car $m \neq 0$.

Les solutions constantes sont donc $t \mapsto 1$ et $t \mapsto -1$.

4. Soit z une solution de (E_m) sur un intervalle I non vide et non réduit à un point telle que : $\forall t \in I$, $z(t) \in]-1, 1[$.

(a) Par hypothèse sur z, la fonction v est dérivable sur I et pour tout $t \in I$ on a :

$$v'(t) = z'(t)\text{arctanh}'(z(t)) = \frac{z'(t)}{1 - z(t)^2} = m.$$

car z est solution de (E_m) sur I.

Il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t) = \int_{t_0}^{t} m ds = m(t - t_0).$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(t) = \tanh(v(t)) = \tanh(m(t - t_0)).$$

(b) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soit $z : t \mapsto \tanh(m(t - t_0))$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$z'(t) = m\tanh'((m(t - t_0)) = m(1 - \tanh(m(t - t_0))^2) = m(1 - z(t)^2).$$

Ainsi z est solution de (E_m) sur $\mathbb{R}$.

5. Soit z une solution de (E_m) sur un intervalle I non vide et non réduit à un point telle que : $\forall t \in I,\ z(t) \notin [-1,1]$.

(a) Par hypothèse, pour tout $t \in I$, $z(t) > 1$ ou $z(t) < -1$. Supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in I$ tels que $z(t_1) > 1$ et $z(t_2) < -1$. Comme z est dérivable sur l'intervalle I, elle est continue sur I et le TVI donne donc l'existence d'un t_3 entre t_1 et t_2 tel que $z(t_3) = 0$. Cela contredit le fait que $\forall t \in I,\ z(t) \notin [-1,1]$.
Ainsi

— soit $\forall t \in I,\ z(t) > 1$;
— soit $\forall t \in I,\ z(t) < -1$.

(b) D'après les hypothèses faites sur z, z est dérivable et ne s'annule pas sur I donc $v = z^{-1}$ est dérivable sur I.
Pour tout $t \in I$, on a

$$v'(t) = -\frac{z'(t)}{z(t)^2} = -m\frac{1-z^2}{z^2} = m\left(1 - \frac{1}{z(t)^2}\right) = m(1 - v(t)^2).$$

Ainsi v est aussi solution de (E_m).
De plus, comme $\forall t \in I, |z(t)| > 1$ alors $\forall t \in I,\ |v(t)| < 1$.
Ainsi, la fonction v satisfait les hypothèses de la question 4 : il existe donc $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad v(t) = \tanh(m(t-t_0)) \quad \text{i.e} \quad z(t) = \frac{1}{\tanh(m(t-t_0))}.$$

(c) On vérifie facilement que ces fonctions sont dérivables sur $]-\infty, t_0[$ et $]t_0, +\infty[$, et, en calculant la dérivée, qu'elles vérifies l'équation (E_m).

Partie 2 – L'équation FKPP : cas stationnaire en espace

On cherche u, solution de l'équation (FKPP$_3$) telle que u ne dépend pas de la position spatiale x, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ u(x,t) = U(t)$$

6. On a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = U'(t) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Donc u satisfait (FKPP$_3$) si et seulement si $U' = U(1-U)$.

7. Soit $V = 2U - 1$. On a $V' = 2U'$ donc :

$$U' = U(1-U) \iff V' = 2U(1-U) \iff V' = 2\frac{V+1}{2}\left(1 - \frac{V+1}{2}\right) \iff V' = \frac{1}{2}(1-V^2).$$

Ainsi U est solution de l'équation précédente si et seulement si V est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$.

8. Un exemple de programme :

```
def Euler(u0,t0,t1,n):
    h = (t1-t0)/n
    L_u=[u0]
    for k in range(1,n+1):
        L_u.append(L_u[-1]+h*L_u[-1]*(1-L_u[-1]))
    return Liste_u
```

9. Un exemple de programme :

```
Abscisse = [t0+k*(t1-t0)/100 for k in range(n+1)
Ordonnee = Euler(u0,t0,t1,100)
plt.plot(Abscisse,Ordonnee)
plt.show()
```

Partie 3 – L'équation FKPP : solution en ondes progressives

On cherche u, solution de l'équation (FKPP_3) telle que u est une onde progressive, c'est-à-dire il existe une constante $c \neq 0$ et une fonction $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ u(x,t) = U(x-ct)$$

10. On a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -cU'(x-ct) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = U'(x-ct) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = U''(x-ct).$$

Ainsi u solution de l'équation (FKPP_3) si et seulement si pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$-cU'(x-ct) = U''(x-ct) + U(x-ct)(1-U(x-ct))$$

si et seulement si pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$-cU'(y) = U''(y) + U(y)(1-U(y)).$$

On a donc bien u solution de l'équation (FKPP_3) si et seulement si U est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_f) : $\quad U'' + cU' + U(1-U) = 0$.

Dans le reste du sujet, on cherche des solutions de (E_f) sous la forme $U : x \mapsto P(\tanh(mx))$ où P est un polynôme à coefficients réels et $m \neq 0$ un réel.

11. Il s'agit simplement de dériver des fonctions composées.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$U'(x) = m\tanh'(mx)P'(\tanh(mx)) = m(1-\tanh(mx)^2)P'(\tanh(mx))$$

et

$$\begin{aligned} U''(x) &= m\left[-2m\tanh'(mx)\tanh(mx)P'(\tanh(mx))\right. \\ &\quad \left.+(1-\tanh(mx)^2)m(1-\tanh(mx)^2)P''(\tanh(mx))\right] \\ &= m(1-\tanh(mx)^2)\left[-2m\tanh(mx)P'(\tanh(mx)) + m(1-\tanh(mx)^2)P''(\tanh(mx))\right] \end{aligned}$$

12. En posant $y = \tanh(mx)$, y parcourt $]-1,1[$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$. En injectant les expressions de la question précédente dans l'équation (E_f) on obtient : U satisfait (E_f) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $y \in]-1,1[$

$$m(1-y^2)\left[m(1-y^2)P''(y) + (c-2my)P'(y)\right] + P(y)(1-P(y)) = 0$$

si et seulement si pour tout $y \in]-1,1[$, le polynôme

$$m(1-X^2)\left[m(1-X^2)P'' + (c-2mX)P'\right] + P(1-P)$$

possède y comme racine.

Le polynôme nul étant le seul polynôme possédant une infinité de racines on a donc : U satisfait (E_f) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$(E_P) \quad m(1-X^2)\left[m(1-X^2)P'' + (c-2mX)P'\right] + P(1-P) = 0.$$

13. Soit P satisfaisant l'équation différentielle ci-dessus.

(a) On a d'après (E_P) :

$$m(1-X^2)\left[m(1-X^2)P'' + (c-2mX)P'\right] = P(P-1).$$

Or d'une part comme $m \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&\deg(m(1-X^2)\left[m(1-X^2)P'' + (c-2mX)P'\right]) \\
&= \deg(m(1-X^2)) + \deg(m(1-X^2)P'' + (c-2mX)P') \\
&\leq 2 + \max(\deg((1-X^2)P''), \deg((c-2mX)P')) \\
&\leq 2 + \deg(P)
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\deg(P(1-P)) = \deg(P) + \deg(1-P)$$

On doit donc avoir :

$$\deg(P) + \deg(1-P) \leq \deg(P) + 2 \quad i.e \quad \deg(1-P) \leq 2.$$

Or

$$\deg(P) = \deg(P-1+1) \leq \max(deg(P-1), \deg(1)) \leq 2.$$

(b) En évaluant (E_P) en 1 et en -1, on a (à cause du facteur $1-X^2$ qui s'annule en 1 et -1) :

$$P(1)(1-P(1)) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1)(1-P(-1)) = 0.$$

(c) On a donc :

$$(P(1) = 0 \quad \text{ou} \quad P(1) = 1) \quad \text{et} \quad (P(-1) = 0 \quad \text{ou} \quad P(-1) = 1).$$

Il y a donc 4 cas à considérer. Dans toute la suite on suppose P non nul (le polynôme nul est évidemment solution).

— **Cas 1 : $P(1) = 0 = P(-1)$.** Alors 1 et -1 sont racines de P et comme $\deg(P) \leq 2$ ce sont les seules et elles sont simples. Par d'Alembert Gauss il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$P = a(X-1)(X+1) = a(X^2-1).$$

Le cas $a = 0$ correspond au polynôme nul qui est bien solution.

— **Cas 2 : $P(1) = 0$ et $P(-1) = 1$.** Soit $Q = P + \frac{1}{2}(X-1)$.
Alors :

$$Q(1) = P(1) = 0 \quad ; \quad Q(-1) = P(-1) - 1 = 0$$

et $\deg(Q) \leq 2$. Donc par ce cas précédente, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$Q = a(X^2-1) \quad \text{i.e} \quad P = a(X^2-1) - \frac{1}{2}(X-1).$$

— **Cas 3 : $P(-1) = 0$ et $P(1) = 1$.** Ce cas se traite pareil en considérant $Q = P - \frac{1}{2}(X+1)$ et on trouve

$$P = a(X^2-1) + \frac{1}{2}(X+1).$$

— **Cas 4 : $P(-1) = 1$ et $P(1) = 1$.** Ce cas se traite pareil en considérant $Q = P - 1$ et on trouve

$$P = a(X^2-1) + 1.$$

(d) et **(e)**

— **Cas 1 :** il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X^2-1)$. Dans ce cas $P' = 2aX$ et $P'' = 2a$. Alors, P satisfait (E_P)

$$\begin{aligned}
&\iff m(1-X^2)\left[2am(1-X^2) + 2a(c-2mX)X\right] + a(X^2-1)(1-a(X^2-1)) = 0\\
&\iff (1-X^2)\left[2am^2(1-X^2) + 2am(c-2mX)X - a(1-a(X^2-1))\right] = 0\\
&\iff 2am^2(1-X^2) + 2am(c-2mX)X - a(1-a(X^2-1)) = 0\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} 2am^2 - a - a^2 & = & 0\\ 2amc & = & 0\\ -2am^2 - 4am^2 + a^2 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Comme $m \neq 0$ cela équivaut à :

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ccc} c & = & 0\\ 2m^2 - 1 - a & = & 0\\ -6m^2 + a & = & 0 \end{array}\right.$$

soit

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ccc} c & = & 0\\ 2m^2 - 1 - a & = & 0\\ -4m^2 - 1 & = & 0. \end{array}\right.$$

Comme $-4m^2 - 1 < 0$, seule la première alternative est possible et seul le polynôme nul est solution dans ce cas.
Cela donne la fonction nulle comme solution de (E_f) et de FKPP_3.

— **Cas 2 :** il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X^2-1)+1$. Dans ce cas $P' = 2aX$ et $P'' = 2a$. Alors, P satisfait (E_P)

$$\begin{aligned}
&\iff m(1-X^2)\left[2am(1-X^2)+2a(c-2mX)X\right] - a(X^2-1)(1+a(X^2-1)) = 0\\
&\iff (1-X^2)\left[2am^2(1-X^2)+2am(c-2mX)X + a(1+a(X^2-1))\right] = 0\\
&\iff 2am^2(1-X^2)+2am(c-2mX)X + a(1+a(X^2-1)) = 0\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} 2am^2+a-a^2 & = & 0\\ 2amc & = & 0\\ -2am^2-4am^2+a^2 & = & 0 \end{array}\right.\\
&\iff a = 0 \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ccc} 2m^2+1-a & = & 0\\ c & = & 0\\ -6m^2+a & = & 0 \end{array}\right.\\
&\iff a = 0 \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ccc} 2m^2+1-a & = & 0\\ c & = & 0\\ -4m^2+1 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc soit $a=0$ et P est le polynôme constant, soit $m = \pm\frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$ et $c = 0$ c'est-à-dire $P = \frac{3}{2}(X^2-1)+1$.
Cela donne pour solution de (E_f) la fonction constante égale à 1 et la fonction

$$U : x \mapsto \frac{3}{2}\left(\tanh\left(\pm\frac{1}{2}x\right)^2 - 1\right) + 1 = \frac{3}{2}\left(\tanh\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 1\right) + 1.$$

Pour FKPP, on obtient alors comme solution la fonction constante égale à 1 et

$$u : (x,t) \mapsto \frac{3}{2}\left(\tanh\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 1\right) + 1.$$

— **Cas 3 :** il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X^2-1) - \frac{1}{2}(X-1)$. Dans ce cas $P' = 2aX - \frac{1}{2}$ et $P'' = 2a$.
On a alors

$$P(1-P) = (1-X^2)(a^2X^2 - aX + \frac{1}{4} - a^2)$$

et en factorisant par $(1-X^2)$ dans (E_P) on obtient : P satisfait (E_P)

$$\begin{aligned}
&\iff 2am^2(1-X^2) + m(2aX - \frac{1}{2})(c-2mX) + a^2X^2 - aX + \frac{1}{4} - a^2 = 0\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} 2am^2 - \frac{1}{2}mc + \frac{1}{4} - a^2 & = & 0\\ 2amc + m^2 - a & = & 0\\ -6am^2 + a^2 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ici a ne peut pas être nul car sinon la ligne 2 donne $m = 0$ ce qui est exclu. Le système équivaut donc à :

$$\begin{cases} 2am^2 - \frac{1}{2}mc + \frac{1}{4} - a^2 & = 0 \\ 2amc + m^2 - a & = 0 \\ -6m^2 + a & = 0 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} a & = & \frac{1}{4} \\ m & = & \pm\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ c & = & \pm\frac{5}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Pour FKPP, on obtient alors comme solution

$$u_+ : (x,t) \mapsto \frac{1}{4}\left(\tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x - \frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right) - 1\right)^2.$$

et

$$u_- : (x,t) \mapsto \frac{1}{4}\left(\tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x + \frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right) + 1\right)^2.$$

— **Cas 4 :** il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = a(X^2 - 1) + \frac{1}{2}(X + 1)$. Ce cas se traite de la même manière que le précédent et on obtient les mêmes solutions de FKPP.