Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD7

Séries

Correction de l'exercice 1.

1. C'est une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{7}$. Elle est donc convergente de somme égale à :
$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{49}{36}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{4n^2+5n}{5^n} = \frac{4n^2-4n+9n}{5^n} = \frac{4}{25} \times \frac{n(n-1)}{5^{n-2}} + \frac{9}{5} \times \frac{n}{5^{n-1}}.$$
La série est donc combinaison linéaire des séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 de raison $\frac{1}{5}$, qui convergent, donc elle converge. De plus :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n^2+5n}{5^n} &= \frac{4}{25}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^{n-2}} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{5^{n-1}} \\ &= \frac{4}{25} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} + \frac{9}{5}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4 \times 2 \times 5^3}{25 \times 4^3} + \frac{9 \times 5^2}{5 \times 4^2} \\ &= \frac{55}{16}.\end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\frac{(-1)^n n}{3^n} = \frac{-1}{3} \times n \times \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1}$$
et on reconnaît, à un facteur près, le terme générale d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{-1}{3}$.
Il s'agit donc d'une série convergente et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{3}{16}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$\frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} \times \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}.$$
Ainsi on obtient, en effectuant le changement de variable $i = k+1$:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(k+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{2^i}{i!} - 1\right).$$

Or la suite $\left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{2^i}{i!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles d'une série exponentielle donc elle converge vers e^2. Par conséquent, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ converge vers $\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$.

Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$.

5. Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\frac{k2^k}{k!} = 2 \times \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k2^k}{k!} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{(k-1)!} = 2\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2^i}{i!}.$$

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n2^n}{n!}$ converge vers $2e^2$.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n2^n}{n!}$ converge et sa somme vaut $2e^2$.

6. Pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{8} \times \frac{n}{4^{n-1}}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^{2n+1}}$ est donc, à un facteur $\frac{1}{8}$ près, la série géométrique dérivée d'ordre 1 de raison $\frac{1}{4}$. Par conséquent, la série converge et sa somme vaut $\frac{2}{9}$.

Correction de l'exercice 2. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!} \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. La famille $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2))$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts (famille échelonnée) de $\mathbb{R}_3[x]$. C'est donc une famille libre de $\mathbb{R}_3[x]$. Comme de plus elle est de cardinal $4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$, c'est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Comme $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$, il existe un unique 4-uplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$x^3+2x^2-4x+1 = a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2).$$

- En évaluant le membre de gauche et de droite en 0 on trouve :

$$1 = a.$$

- En évaluant le membre de gauche et de droite en 1 on trouve :

$$0 = a+b.$$

- En évaluant le membre de gauche et de droite en 2 on trouve :
$$9 = a + 2b + 2c.$$
- En évaluant le membre de gauche et de droite en -1 on trouve :
$$6 = a - b + 2c - 6d.$$

Finalement, $a = 1$, $b = -1$, $c = 5$ et $d = 1$. Les coordonnées de $x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ dans la base de la question précédente sont donc $(1, -1, 5, 1)$.

3. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$u_n = \frac{1}{n!} - \frac{n}{n!} + \frac{5n(n-1)}{n!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}.$$

Or,

- la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$ converge (série exponentielle sans son premier terme) et sa somme vaut $e - 1$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$ donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!}$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e;$$
- pour tout $n \geq 2$, $\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$ (et le premier terme est nul) donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{n!}$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e;$$
- pour tout $n \geq 3$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{n!} = \frac{1}{(n-3)!}$ (et les deux premiers termes sont nuls) donc, en faisant un changement d'indice, $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = e.$$

Ainsi, $\sum_{n\geq 1} u_n$ est une somme de séries convergentes donc est convergente et sa somme est
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = e - 1 - e + 5e + e = 6e - 1.$$

Correction de l'exercice 3.

1. Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n).$$
Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right) = \ln(n+1).$$
Ainsi la suite des sommes partielles est divergente donc la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.

2. Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
Ainsi la suite des sommes partielles converge vers 1 donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

3. Soit $n \geq 2$. On a :
$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n-1) - \ln n + \ln(n+1) - \ln(n).$$
Donc par télescopage :
$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln(2).$$
Ainsi, la série converge et sa somme vaut $-\ln(2)$.

4. Pour tout $n \geq 2$,
$$\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{n(n-1) - 2(n^2-1) + n(n+1)}{n.(n^2-1)} = \frac{2}{n(n^2-1)}.$$
Soit $N \geq 2$. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \frac{2}{n(n^2-1)} &= \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1}\right) \\
&= \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=2}^{N} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{N} \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n(n^2-1)}$ est convergente, de somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n(n^2-1)} = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 4.

1. On procède par récurrence en utilisant :
$$\forall x \in]0,1], \quad x - x^2 \in]0,1].$$
2. Soit $n \geq 0$. On a
$$u_{n+1} - u_n = u_n - (u_n - u_n^2) = -u_n^2 < 0.$$
Ainsi : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \leq u_n$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
D'après la question précédente elle est aussi minorée par zéro donc par convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ.
D'après la question 1, on a $\ell \in [0,1]$.
Comme la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x - x^2$ est continue sur $[0,1]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ alors ℓ est un point fixe de f. Soit $x \in [0,1]$.
$$f(x) = x \iff x - x^2 = x \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$
Ainsi l'unique point fixe de f est 0 donc $\ell = 0$. Finalement la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.
3. La formule de récurrence donne :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n^2 = u_n - u_{n+1}.$$
Donc pour tout entier naturel n on obtient par télescopage
$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}.$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 - u_{n+1} = u_0$, la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} u_k^2\right)_{n\geq 0}$ converge vers u_0. Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ converge et sa somme vaut u_0.
4. On utilise encore un télescopage :
$$\forall n \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0).$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) = -\infty.$$
Ainsi la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\right)_{n\geq 0}$ diverge donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.

5. On a :
$$\forall n \geq 1, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{u_n - u_n^2}{u_n}\right) = \ln(1-u_n).$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, par équivalent usuel on obtient :
$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_n$$
d'où
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors pour tout entier naturel n on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$$
Ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est à termes positifs. Les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ sont à termes positifs, donc avec l'équivalent ci-dessus et d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on déduit qu'elles sont de même nature. Or d'après la question précédente, $\sum\limits_{n\geq 0} -\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge. Donc $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente aussi.

Correction de l'exercice 5. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. Par équivalents usuels :
$$n^3 - n^2 + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3 \quad \text{et} \quad 5n^5 + 3n^4 + 2n \underset{n\to+\infty}{\sim} 5n^5$$
donc par quotient
$$\frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n} \equiv \frac{n^3}{5n^5} = \frac{1}{5n^2}.$$
Les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{5n^2}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{5n^2}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n}$ converge aussi.

2. Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$
par équivalent usuel (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$). Les séries $\sum\limits_{n\geq 1}(n^{\frac{1}{n}} - 1)$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or
$$\forall n \geq 3, \quad \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$$

et la série harmonique diverge. Par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge aussi.

Finalement, la série $\sum_{n\geq 1}(n^{\frac{1}{n}}-1)$ diverge aussi.

3. La série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est à termes quelconques. Étudions l'absolue convergence.

   Pour tout $n \geq 1$, $\left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et par équivalent usuel :

   $$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

   Les séries $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge aussi.

   Ainsi la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a :

   $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

   Or par équivalent usuel :

   $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

   puis par compatibilité avec le quotient

   $$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

   Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ et par continuité de l'exponentielle :

   $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e.$$

   Donc la série $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diverge grossièrement

5. Pour tout $n \geq 8$, on a :

   $$n^{\ln(n)} \geq n^2$$

   donc

   $$0 \leq \frac{1}{n^{\ln(n)}} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\ln n}}$ est convergente.

6. La série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$ est à termes quelconques ; on va donc étudier son absolue convergence.
Par équivalent usuel :
$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$
Par compatibilité des équivalents avec la valeur absolue on en déduit l'équivalent suivant :
$$\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$
Les séries
$sum_{n\geq 1}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)\right|$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ sont à termes positifs donc, d'après le critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature.
Or, pour tout $n \geq 1$:
$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$
et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Par comparaison $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ l'est donc également.
Finalement la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann convergente donc la série $\sum_{n\geq 1}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\right)\right|$ converge aussi.
Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$ est absolument convergente donc convergente.

7. Par croissance comparée on sait que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$. Donc la série diverge grossièrement.

8. Soit $n \geq 1$.
$$\sqrt{n^2-n+2} - n = n\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} - n = n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} - 1\right).$$
Comme $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = 0$, par équivalent usuel on a :
$$\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right) = \frac{-n+2}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Donc, par compatibilité des équivalents avec le produit, on trouve

$$\sqrt{n^2-n+2}-n = n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2-n+2}-n = -\frac{1}{2}.$$

Donc la série diverge grossièrement.

9. Soit $n \geq 1$. On a :

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}.$$

Par équivalent usuel on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par compatibilité avec le produit on en déduit :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ puis par équivalent usuel, on trouve :

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1 = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Par transitivité, on a donc

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Les séries $\sum\limits_{n\geq1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$ et $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n}$ sont à termes positifs donc d'après le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, elles sont de même nature. Comme $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n}$ est divergente, $\sum\limits_{n\geq1}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n-1\right)$ est divergente aussi.

Correction de l'exercice 6.

1. On a au voisinage de 0 :

$$x-\ln(1+x) = x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right) = \frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}(x^2)$$

donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, on a au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui entraîne que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$
On vérifie que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et on conclut par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

2. On a par équivalent usuel : $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Comme tout est positif, on conclut par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
3. On a pour tout $n \geq 0$:
$$|((-1)^n n + \sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}| \leq (n+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}} \leq 2ne^{-\sqrt{n}}.$$
Or par croissance comparée :
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \times 2ne^{-\sqrt{n}} = 0.$$
Par conséquent, la suite $(n^2 \times 2ne^{-\sqrt{n}})$ est bornée. Il existe donc $M \geq 0$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 \times 2ne^{-\sqrt{n}} \leq M$$
ou encore :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2ne^{-\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2}.$$
Par comparaison, on en déduit que $\sum_{n\geq 0} 2ne^{-\sqrt{n}}$ puis que $\sum_{n\geq 0} |((-1)^n n + \sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}|$ converge aussi.
La série $\sum_{n\geq 0} ((-1)^n n + \sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}$ est ainsi absolument convergente donc convergente.

Correction de l'exercice 7 (Une série convergente mais pas absolument convergente).

1. On a
$$\forall n \geq 1 \quad |u_n| = \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$
La série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est donc divergente par comparaison avec la série harmonique. Ainsi $\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. (a) • Soit $n \geq 1$. On a :
$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} &= \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$
Ainsi : $\forall n \geq 1,\ S_{2(n+1)} \leq S_{2n}$.
La suie $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est donc décroissante.

- Soit $n \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \geq S_{2n}$.
La suite $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est donc croissante.

- Soit $n \geq 1$. Alors :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

Ainsi les suites $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n})_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

(b) Les suites $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(S_{2n})_{n\geq 1}$ étant adjacentes, elles convergent vers une même limite donc $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers cette même limite.

(c) La suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge.

Correction de l'exercice 8 (Deux suites équivalentes, l'une convergente, l'autre divergente).

1. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n}.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n} = 0$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Ainsi $v_n \sim u_n$.

2. Supposons que $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge. On a vu à l'exercice précédent que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Or pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{n} = v_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge donc en tant que différence de séries convergentes : absurde !
Ainsi la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ diverge.

Correction de l'exercice 9.

1. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]1, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable sur $]1, +\infty[$. De plus

$$\forall x \in \,]1, +\infty[\,, \quad f'(x) = -\frac{\ln(x) + 1}{(x\ln(x))^2} < 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

2. Soit un entier k tel que $k \geq 3$. Comme f est décroissante sur $[k-1, k]$ alors :

$$\forall x \in [k-1, k], \quad f(k) \leq f(x) \leq f(k-1).$$

En intégrant cette inégalité entre $k-1$ et k, on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} f(k)\, dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)\, dx$$

c'est-à-dire :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq f(k-1)\,.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour k allant de 3 à n, on obtient

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq \sum_{k=3}^{n} f(k-1)\,.$$

Cela ce ré-écrit, en faisant un changement de variable dans le membre de droite :

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k)\,.$$

Ainsi :

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Or, par la relation de Chasles, on a : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx = \int_{2}^{n} f(x)dx$. Donc

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_{2}^{n} f(x)\, dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Calculons $\displaystyle\int_{2}^{n} f(x)dx$. On remarque que f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où $u = \ln$. Une primitive de f est donc $\ln(u)$. Ainsi

$$\int_{2}^{n} f(x)dx = [\ln(\ln(x))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$

D'après la question précédente, on a donc

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \quad \text{et} \quad \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

Ainsi :

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$

(c) En divisant membre à membre par $\ln(\ln(n))$ dans l'inégalité précédente on trouve que pour tout $n \geq 2$:

$$1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 + \frac{1}{\ln(\ln(n))}\left(\frac{1}{2\ln(2)} - \ln(\ln(2))\right)$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(\ln(n))}\left(\frac{1}{2\ln(2)} - \ln(\ln(2))\right) = 1.$$

Par encadrement, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} = 1$. Ainsi $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$

(a) • Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - S_n - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+2)) + \ln(\ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x)dx \\ &\geq 0 \quad \text{en utilisant la question 2 avec } k = n+2. \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

• Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{n+1} - S_n - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= f(n+1) - \int_{n}^{n+1} f(x)dx \\ &\leq 0 \quad \text{en utilisant la question 2 avec } k = n+1. \end{aligned}$$

Ainsi $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

• Soit $n \geq 2$. Alors :

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) \\ &= \int_{n}^{n+1} f(x)dx. \end{aligned}$$

Ainsi, par la question 2 (avec $k = n+1$), on a

$$0 \leq v_n - u_n \leq f(n).$$

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Ainsi les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

(b) Comme $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante et a pour limite ℓ alors

$$\forall n \geq 2, \quad u_n \leq \ell.$$

On en déduit :

$$\forall n \geq 2, \quad v_n - \ell \leq v_n - u_n \leq f(n)$$

où la dernière inégalité a été prouvée à la question précédente. De plus, $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et a pour limite ℓ donc

$$\forall n \geq 2, \quad \ell \leq v_n.$$

Finalement, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}$$

(c) Ainsi

```
def approx(eps):
        n = 2
        s = 0
        while 1/(n*np.log(n))>eps:
                s += 1/(n*np.log(n))
                n = n+1
        return s-np.log(np.log(n))
```