Chapitre 8

Concepts de base de probabilités

8.1 Espaces probabilisés

8.1.1 Probabilité et espace probabilisé

Définition 8.1 (Probabilité)

Soit Ω un univers (un ensemble non vide [a]) et $\mathcal{A}$ une tribu [b]. Une probabilité est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
2. (σ-*additivité*) pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements **deux à deux incompatibles**, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge et sa somme vaut $\mathbb{P}\left(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$:

$$\mathbb{P}\left(\cup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

On dit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

a. En pratique l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire
b. En pratique l'ensemble des événements

Exemple important. Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $\Omega = \{\omega_i \ ; \ i \in I\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $(p_i)_{i\in I}$ des réels tels que :

— $\forall i \in I$, $p_i \in [0,1]$;
— $\displaystyle\sum_{i\in I} p_i$ converge et vaut 1.

Alors, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que :

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Pour un événement A on a alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I \ | \ \omega_i \in A} p_i \quad \text{(la } \sigma - \text{additivité garanti la convergence)}$$

autrement dit, la probabilité $\mathbb{P}(A)$ est alors la somme des probabilités des issues qui constituent A.
Rmq : si I est une partie finie, la convergence est automatique.

Définition 8.2

Un événement est dit négligeable si sa probabilité est nulle.
Un événement est dit presque-sûr si sa probabilité est égale à 1.

Proposition 8.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$.

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;
3. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Définition 8.3 (Système (quasi)-complets d'événements)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et I une partie non vide de $\mathbb{N}$.

1. Une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est appelée un système complet d'événements si :
   (a) $\Omega = \cup_{i\in I} A_i$;
   (b) $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. Une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ est appelée un système quasi-complet d'événements si :
   (a) $1 = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$;
   (b) $\forall i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 8.2 (Formule des probabilités totales, version 1)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ un système (quasi)-complet d'événements.
Alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Remarque 8.1. Dans l'énoncé ci-dessus, lorsque I est infini, la convergence de $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$ est garantie par la σ-additivité.

8.1.2 Conditionnement et indépendance

Définition 8.4 (Probabilité conditionnelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout événement B, on appelle probabilité de B sachant A et on note $\mathbb{P}_A(B)$ ou $P(B|A)$ le réel :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

La fonction $\mathbb{P}_A : B \in \mathcal{A} \mapsto \mathbb{P}_A(B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Proposition 8.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A, B deux événements et $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements non négligeables.

1. (Formule de Bayes) Si A et B sont non négligeables, $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_B(A)\dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$.
2. (Formules des probabilités totales, version 2) $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$.
3. Si A et B sont non négligeables, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B)\dfrac{\mathbb{P}(A)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$.

Remarque 8.2. Dans les deux derniers points, lorsque I est infini, la proposition garantit la convergence de la série $\displaystyle\sum_{i \in I} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$ et donne la valeur de la somme.

Proposition 8.4 (Formule des probabilités composées)

Soit $n \geq 3$ et soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
On considère des événements $A_1, \dots, A_n$ tels que $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) \prod_{i=2}^{n-1} \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_i}(A_{i+1}).$$

Définition 8.5 (Indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Deux événements A, B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.
2. Des événements $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ sont dits mutuellement indépendants si pour tout $j_1, \ldots, j_k \in [\![1, n]\!]$:
$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^k A_{j_i}) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_{j_i}).$$
3. Des événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dits mutuellement indépendants si toute sous-famille finie est mutuellement indépendante au sens du point précédent.

8.2 Variables aléatoires réelles

8.2.1 Généralités

Définition 8.6 (Variable aléatoire réelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
On appelle variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}.$$

Notation importante.

- On notera $[X \leq a]$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$.
- Plus généralement, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on notera $[X \in I]$ l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$.

Proposition 8.5

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
Alors pour tout intervalle I, $[X \in I] \in \mathcal{A}$.

8.2.2 Fonction de répartition

Définition 8.7 (Fonction de répartition)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Proposition 8.6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors la fonction de répartition F_X de X vérifie :

1. F_X est croissante,
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

8.2.3 Indépendance

Définition 8.8 (Indépendance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Deux variables aléatoires réelles X, Y sont indépendantes si pour tout intervalles I, J, on a :
$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}(X \in I)\mathbb{P}(Y \in J).$$
2. Des variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ sont dites mutuellement indépendantes si pour tout intervalles $I_1, \ldots, I_n$:
$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}[X_i \in I_i]) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i).$$
3. Des variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites mutuellement indépendantes si toute sous-famille finie est mutuellement indépendante au sens du point précédent.