Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD8

Probabilités générales

1 Espaces probabilisés

Correction de l'exercice 1. On considère l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = a3^{-k}$$

où a est un réel à déterminer.

On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a3^{-k} = a\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{a}{2}.$$

Donc on définit une loi de probabilité si et seulement $a = 2$.

1. En notant A l'ensemble des nombres pairs et B celui des nombres impaires, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{2n\}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{2n\}) \quad \text{(par } \sigma-\text{additivité, les } \{2n\} \text{ étant 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{2n}} \\
&= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n \\
&= \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}\{2n+1\}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{2n+1\}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{2n+1}} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n \\
&= \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.

1. On cherche le coefficient de proportionnalité a tel que :

$$\forall k \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = ak.$$

Une condition nécessaire et suffisante est que :

$$\sum_{k=1}^{n} ak = 1$$

c'est-à-dire

$$a\frac{n(n+1)}{2} = 1.$$

Ainsi la seule probabilité qui convient est définie par :

$$\forall k \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

2. On cherche le coefficient de proportionnalité a tel que :

$$\forall k \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{1, \ldots, k\}) = ak.$$

Une condition nécessaire et suffisante est que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) = 1.$$

Or pour tout $k \geq 2$:

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{1, \ldots, k\}) - \mathbb{P}(\{1, \ldots, k-1\}) = ak - a(k-1) = a.$$

Donc la condition devient :

$$a + \sum_{k=2}^{n} a = 1.$$

Ainsi la seule probabilité qui convient est définie par :

$$\forall k \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}.$$

Correction de l'exercice 3. On tire deux lettres au hasard dans un texte à n lettres.

1. L'ensemble Ω des issues possibles est l'ensemble des parties de deux lettres parmi les n lettres. On le munit de la tribu discrète $\mathcal{P}(\Omega)$.
   Chaque issue est équiprobable donc $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme (sachant que le cardinale de Ω est $\binom{n}{2}$).
2. Soit E l'événement les deux lettres tirées sont les même et E_A,…,E_Z les événements tirer deux A,…, deux Z. Alors on a :

$$E = E_A \cup \cdots \cup E_Z$$

et les ensembles $E_A,\ldots,E_Z$ sont deux à deux disjoints. Ainsi :

$$I = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E_A) + \cdots + \mathbb{P}(E_Z).$$

Déterminons $\mathbb{P}(E_A)$ (les autres se déduiront par un raisonnement identique).
Comme $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme, on a :

$$\mathbb{P}(E_A) = \frac{\#E_A}{\binom{n}{2}}.$$

Or les issues qui réalisent E_A sont les issues pour lesquels les deux lettres sont choisies parmi les n_A lettres A du texte. Il y donc $\displaystyle\binom{n_A}{2}$ telles issues :

$$\mathbb{P}(E_A) = \frac{\binom{n_A}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{n_A(n_A-1)}{n(n-1)}.$$

Finalement, en raisonnant de même pour les autres lettres :

$$I = \mathbb{P}(E_A) + \cdots + \mathbb{P}(E_Z) = \frac{n_A \times (n_A - 1)}{n \times (n-1)} + \cdots + \frac{n_Z \times (n_Z - 1)}{n \times (n-1)}.$$

Correction de l'exercice 4.

1. On prend pour Ω l'ensemble $\{R, V, B\}^3$ (les triplets de boules Rouge/Vert/Blanche) avec comme tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.
2. On cherche $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$ où B_1 est l'événement avoir une boule blanche au premier tirage etc.

   D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(R_3) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5. Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des souris malades. Des essais prouvent que :

— 96 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand la souris est effectivement malade.

— 94 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand la souris n'est pas malade.

On tire une souris au sort et on note M l'événement « la souris malade » et R « le test est positif ».
L'énoncé donne

$$\mathbb{P}_M(R) = 0.96 \quad ; \quad \mathbb{P}_{M^c}(R) = 0.06$$

et par ailleurs

$$\mathbb{P}(M) = 0.03.$$

On cherche $\mathbb{P}_R(M)$.

On a, en décomposant sur le SCE (M, M^c) que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}_M(R)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{M^c}(R)\mathbb{P}(M^c)\\ &= \mathbb{P}_M(R)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{M^c}(R)(1-\mathbb{P}(M))\\ &= 0.96 \times 0.03 + 0.06 \times 0.97\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \cap R) &= \mathbb{P}_M(R)\mathbb{P}(M)\\ &= 0.96 \times 0.03\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbb{P}_R(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{48}{145} \simeq 0.33.$$

Donc, la probabilité que la souris soit malade sachant que le test est positif de l'ordre de 33%....

Correction de l'exercice 6. On tire un arbre au hasard et on note :

— M l'événement « l'arbre est malade »,

— C l'événement « l'arbre est un chêne »,

— H l'événement « l'arbre est un hêtre »,

— B l'événement « l'arbre est un boulot ».

Les données de l'exercice sont alors :

$$\mathbb{P}(C) = 0.3 \quad ; \quad \mathbb{P}(H) = 0.2 \quad ; \quad \mathbb{P}(B) = 0.5$$

$$\mathbb{P}_C(M) = 0.1 \quad ; \quad \mathbb{P}_H(M) = 0.25 \quad ; \quad \mathbb{P}_B(M) = 0.04$$

Les probabilités recherchées sont :

$$\mathbb{P}_M(C) \quad ; \quad \mathbb{P}_M(H) \quad ; \quad \mathbb{P}_M(B)$$

On a, par exemple :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_M(C) &= \mathbb{P}_C(M) \times \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(M)}\\ &= \mathbb{P}_C(M) \times \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}_C(M)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}_H(M)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}_B(M)\mathbb{P}(B)} \quad \text{(probabilités totales)}\\ &= \frac{0.1 \times 0.3}{0.1 \times 0.3 + 0.25 \times 0.2 + 0.04 \times 0.5}\\ &= \frac{3}{10}.\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\mathbb{P}_M(H) = \frac{5}{10} \quad ; \quad \mathbb{P}_M(B) = \frac{2}{10}.$$

Correction de l'exercice 7. On jette n fois une pièce, pile sortant avec probabilité p à chaque tirage. On note X_n la variable indicatrice valant 1 si le nombre de piles dans les n premiers jets est pair et 0 sinon.
On a $X_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(X_n = 1) = 1 - p \quad , \quad \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(X_n = 1) = p.$$

Remarquons que $P_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_{n-1} = 1), (X_{n-1} = 0)$, on a :

   $$P_n = \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(X_n = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \mathbb{P}_{[X_{n-1}=0]}(X_n = 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) = qP_{n-1} + p(1 - P_{n-1})$$

   c'est-à-dire
   $$P_n = (q - p)P_{n-1} + p$$
   où $q = 1 - p$.
2. On reconnait là une suite arithmético-géométrique de point fixe α vérifiant

   $$\alpha = (1 - 2p)\alpha + p \quad \text{càd} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

   Comme $P_0 = 1$, on a, par la formule de résolution d'une telle suite

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \frac{1}{2}(1 + (q - p)^n).$$

Correction de l'exercice 8. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_i^k l'événement « la princesse ouvre la porte n°i au k-ième essai ».

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement D_k est réalisé si et seulement si :
   — à chacun des essais précédents la princesse n'a ni déjà délivré le prince ni n'est morte ;
   — au k-ième essai elle délivre le prince.

   Ainsi : $D_k = P_3^1 \cap \cdots \cap P_3^{k-1} \cap P_1^k$. D'après la formule des probabilités composées, on a donc :

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_k) &= \mathbb{P}(P_3^1 \cap \cdots \cap P_3^{k-1} \cap P_1^k) \\ &= \mathbb{P}(P_3^1)\mathbb{P}_{P_3^1}(P_3^2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{P_3^1 \cap \cdots \cap P_3^{k-2}}(P_3^{k-1})\mathbb{P}_{P_3^1 \cap \cdots \cap P_3^{k-1}}(P_1^k) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^k.\end{aligned}$$

2. On a $D = \bigcup_{n=1}^{+\infty} D_k$. Donc par σ-additivité :

   $$\mathbb{P}(D) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D_k) = \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 9. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « obtenir une boule blanche au i-ème lancer ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compte tenu que les tirages s'arrêtent à l'obtention d'un noire on a :
$$N_n = B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap N_n.$$
D'après la formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap N_n) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(N_n)\\ &= \frac{2}{4} \times \frac{2+b}{4+b} \times \cdots \times \frac{(n-2)b+2}{(n-2)b+4} \times \frac{2}{(n-1)b+4}.\end{aligned}$$
De même, $A_n = B_1 \cap \cdots \cap B_n$. D'après la formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n)\\ &= \frac{2}{4} \times \frac{2+b}{4+b} \times \cdots \times \frac{(n-2)b+2}{(n-1)b+4} \times \frac{(n-1)b+2}{(n-1)b+4}.\end{aligned}$$
2. Dans cette question $b = 1$ donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N_n) = \frac{2 \times (n)!}{(n+3)!} \times 3! = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$
Or, un calcul montre que pour tout $n \geq 1$:
$$\frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 6\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right).$$
On obtient alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, par télescopage :
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(N_n) &= 6\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)\\ &= 6\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + 6\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right)\\ &= \frac{6}{2} - \frac{6}{N+2} + \frac{6}{N+3} - \frac{6}{3}\\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$
Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_n) = 1$.

3. (a) On procède par récurrence. Pour tout $n \geq 1$ soit $\mathcal{P}(n)$: « pour toute famille $x_1, \ldots, x_n$ de réels positifs, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} x_k$. »
   - Initialisation : c'est évident : $\forall x \geq 0,\ 1 + x \geq x$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels positifs. On a par hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) = (1+x_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) + x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\\ &\geq \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\\ &\geq \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : par le principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(b) D'après la question 1 et la question précédente on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathbb{P}(A_n)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{bk+4}{bk+2} &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2}{bk+2}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{bk+2}.\end{aligned}$$

Or la série harmonique diverge (vers $+\infty$) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{2}{bk+2} = +\infty$. Par comparaison :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathbb{P}(A_n)} = +\infty \quad \text{càd} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0.$$

(c) Par croissance de $\mathbb{P}$, on a :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \mathbb{P}(A_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.$$

Donc, on déduit

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n) = 0.$$

(d) Ne jamais obtenir de noire c'est toujours tirer des blanches, ainsi :

$$F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

D'après la question précédente, $\mathbb{P}(F) = 0$.

Correction de l'exercice 10. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = \mathbb{P}(A_i)$.

1. Pour exploiter l'indépendance (qui permet de calculer la probabilité d'une intersection), on va passer au complémentaire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - \mathbb{P}((A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n A_i^c) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_i^c)\end{aligned}$$

car $A_1^c, \ldots, A_n^c$ sont également mutuellement indépendants.
Finalement :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - p_i).$$

Donner une expression simple de $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ en fonction de $p_1, \ldots, p_n$.

2. En notant A_i l'événement « avoir un accident à la i-ème expérience », la probabilité recherchée est
$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$$
qui vaut donc $1-(1-p)^n$.

Correction de l'exercice 11. Soit A_n l'événement « obtenir 2 ou 4 lors des $(n-1)$ premiers lancers et 6 au n-ième.
Alors la probabilité recherchée est
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
car les A_n sont deux à deux incompatibles.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et calculons $\mathbb{P}(A_n)$. En notant B_i « obtenir 2 ou 4 au i-ième lancer » et C_i « obtenir 6 au i-ième lancer » on a :
$$A_n = B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap C_n$$
et par indépendance des lancers :
$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap C_n) = \mathbb{P}(B_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(B_{n-1})\mathbb{P}(C_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$$
Finalement :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}.$$

2 Variables aléatoires réelles

Correction de l'exercice 12. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire, sans remise (ou simultanément, ce qui revient au même) n boules et on note X le plus grand des numéros tirés.

1. X prend ses valeurs dans $[\![n, N]\!]$.
2. On tire au hasard une partie $P \subset [\![1, N]\!]$ à n éléments parmi N. P suit donc la loi uniforme sur l'ensemble de ces parties. Il y a $\binom{N}{n}$ telles parties.

   Pour $k \in [\![n, N]\!]$, le nombre de parties à n éléments ayant k pour plus grand élément est $\binom{k-1}{n-1}$. On a donc, pour ces k,
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

3. L'espérance de X est donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} k \binom{k-1}{n-1} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} k \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \\
&= n \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} \\
&= n \frac{1}{\binom{N}{n}} \binom{N+1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}(N+1)
\end{aligned}$$

On peut se demander d'où vient la formule :

$$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$

On peut faire un raisonnement ensembliste. Pour choisir $n+1$ éléments parmi $N+1$ il suffit de choisir le plus grand (appelé $k+1 \in [\![n+1, [\![N+1]\!])$ puis de choisir n éléments parmi ceux inférieurs à $k+1$ strictement : il y a alors $\binom{k}{n}$ possibilités.

Correction de l'exercice 13. 1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La variable aléatoire X_i suit la loi $\mathcal{B}(k, \frac{1}{n})$.

2. Soit $i \neq j$. On a $P(X_i = k, X_j = k) = 0$ car en k tirages on ne peut pas tirer k fois la boule i et k fois la boule j. Or, d'après la question précédente, $P(X_i = k)$ et $P(X_j = k)$ sont non nulles donc

$$P(X_i = k, X_j = k) \neq P(X_i = k)P(X_j = k).$$

Ainsi, les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes. Donc les variables $X_1, \ldots, X_n$ ne le sont pas.

Correction de l'exercice 14. On notera $U = \max(X_1, X_2)$ et $V = \min(X_1, X_2)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque : $[U \leq x] = [X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x]$ donc par indépendance :

$$F_U(x) = \mathbb{P}(U \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)\mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_1(x)F_2(x).$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On remarque : $[V > x] = [X_1 > x] \cap [X_2 > x]$ donc par indépendance :

$$\begin{aligned}
F_V(x) = \mathbb{P}(V \leq x) = 1 - \mathbb{P}(V > x) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) \\
&= 1 - (1 - F_1(x))(1 - F_2(x)).
\end{aligned}$$