Chapitre 1

Fonctions de deux variables

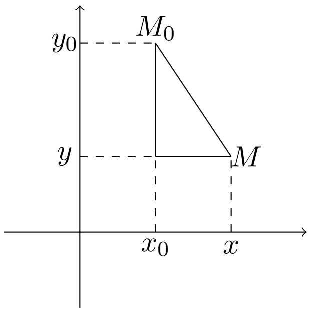
1.1 Généralités sur les fonctions de deux variables

1.1.1 Exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

Rappel(s) 1.1. Étant donnés $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M = (x, y)$ deux points de $\mathbb{R}^2$ la distance entre M_0 et M, notée $d(M_0, M)$, est :

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Il s'agit d'une simple application du théorème de Pythagore (voir la figure suivante).



Définition 1.1 (Disque ouverts/fermés)

Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- On appelle **disque ouvert de centre** A **et de rayon** r et on note $D(A, r)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D(A, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) < r\right\}.$$

- On appelle **disque fermé de centre** A **et de rayon** r et on note $D_f(A, r)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D_f(A, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(A, M) \leq r\right\}.$$

Exemple 1.1. Faire des dessins de disques et de complémentaires de disques.

Définition 1.2 (Pavés)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- Le sous-ensemble $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ est appelé un **pavé**.
- Si les deux intervalles I et J sont ouverts, on parle de **pavé ouvert**.

Exemple 1.2. Faire des dessins.

1. Les ensembles de la forme $]a, b[\times]c, d[$ sont des pavés ouverts.
2. Les ensembles de la forme $[a, b] \times [c, d]$, $[0, 1[\times [0, 1[$ sont des pavés (pas ouverts).

Exemple 1.3. L'intersection de deux pavés (ouverts) est encore un pavé (ouvert).
Dessin.

Définition 1.3 (Demi-plans)

Les pavés ouverts de la forme $]a, +\infty[\times\mathbb{R}$, $]-\infty, a[\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times]-\infty, a[$ et $\mathbb{R}\times]a, +\infty[$ sont appelés des **demi-plans ouverts**.

Exemple 1.4. Dessins.

1.1.2 Fonctions de deux variables

Définition 1.4 (Fonction de deux variables réelles)

On appelle **fonction numérique de deux variables réelles** toute application f définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y). \end{aligned}$$

Exemple 1.5. Chaque fois, écrire l'ensemble de définition D et le dessiner.

1. Les fonctions de la forme suivante sont appelées **des fonctions polynomiales**.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{(i,j)\in A} a_{i,j} x^i y^j \end{aligned}$$

   avec $A \subset \mathbb{N}^2$ fini.

2. Les fonctions obtenues par composition avec une fonction d'une variable :
   (a) La fonction $(x, y) \longmapsto \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$;
   (b) La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy} - x + 1$.
3. Les fonctions qui ne dépendent que d'une variable :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto xe^{-x} \quad \text{ou} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y^2 + \ln(y^4 + 2).$$

Définition 1.5 (Applications partielles)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

- On appelle première **application partielle** de f en (x_0, y_0) et on note $f_{y=y_0}$ l'application
$$x \longmapsto f(x, y_0)$$
définie sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in \mathcal{D}\}$
- On appelle deuxième **application partielle** de f en (x_0, y_0) et on note $f_{x=x_0}$ l'application
$$y \longmapsto f(x_0, y)$$
définie sur l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in \mathcal{D}\}$.

Exemple 1.6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Alors, pour $(x_0, y_0) = (-1, 3)$ on a :

$$\begin{aligned} f_{y=3} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 9 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f_{x=-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto y^2 + 1. \end{aligned}$$

1.1.3 Représentation graphique

Définition 1.6 (Représentation graphique)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. On appelle **graphe** de la fonction f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D} \text{ et } z = f(x, y)\right\} = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \ , \ (x, y) \in \mathcal{D}\right\}.$$

Exemple 1.7. Graphe des fonctions suivantes :

1. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$,
2. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$,
3. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$.

Illustrer le lien entre les fonctions partielles et les sections par des plans verticaux d'équation $x = x_0$ et $y = y_0$.

Définition 1.7 (Ligne de niveau)

Soit f une fonction numérique de deux variables réelles définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $c \in \mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau c de f** le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = c\}.$$

Remarque 1.1. Graphiquement, on regarde l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal d'équation $z = c$ et on projette sur le plan (Oxy) pour obtenir la ligne de niveau c de f.

Remarque 1.2. Lorsque $f(x, y)$ représente :

— une température au point de coordonnées (x, y), les lignes de niveaux sont les courbes de température constante : les **isothermes** ;

— une pression au point de coordonnées (x, y), les lignes de niveaux sont les courbes de pression constante : les **isobares** ;

— une altitude au point de coordonnées (x, y), les lignes de niveaux sont les courbes d'altitude constante.

Exemple 1.8.

1. afficher les cartes IGN ;
2. affficher les cartes isobares.

Exemple 1.9. On reprend l'exemple de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + y^2$.

1. La ligne de niveau -1 de f est l'ensemble vide.
2. La ligne de niveau 0 de f est $\{(0, 0)\}$.
3. La ligne de niveau 1 de f est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.
4. Plus généralement, la ligne de niveau $c \in \mathbb{R}$ est
   - l'ensemble vide si $c < 0$,
   - $\{(0, 0)\}$ si $c = 0$,
   - le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{c}$ si $c > 0$.

Exemple 1.10. Graphe et lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$,
2. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$,
3. la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$.

Lien entre lignes de niveaux et sections par des plans horizontaux.

1.2 Continuité des fonctions de deux variables

Rappel(s) 1.2. Pour les fonctions d'une variable : soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists r > 0 \; \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap I, \; |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists r > 0 \; \forall x \in I, \; |x - x_0| \leq r \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, une fonction d'une variable réelle f est continue en x_0 si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ, toutes les valeurs $f(x)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0)$ pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.

Dans le cas de deux variables, la distance entre deux arguments de la fonction n'est plus mesurée par la valeur absolue de la différence mais par la norme (euclidienne) de la différence et mène à la définition suivante :

Définition 1.8 (Continuité en un point)

Soit f une fonction numérique de deux variables définie sur un pavé ouvert $I \times J$ et soit $(x_0, y_0) \in I \times J$. On dit que f est **continue en** (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists r > 0 \; \forall (x,y) \in I \times J, \; \| (x,y) - (x_0, y_0) \| < r \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon.$$

Autrement dit, f est continue en (x_0, y_0) si, pour toute précision arbitrairement petite ϵ, toutes les valeurs $f(x,y)$ de f sont à une distance maximale de ϵ de $f(x_0, y_0)$ pourvu que (x,y) soit suffisamment proche de (x_0, y_0).

Définition 1.9 (Continuité)

Soit f une fonction de deux variables définie sur un pavé ouvert $I \times J$. On dit que f est **continue sur** $I \times J$ si f est continue en tout point de $I \times J$.

Exemple 1.11 (Admis)**.**

1. Les fonctions polynomiales sont continues.
2. Somme/produit/quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues est continue.
3. Composer une fonction d'une fonction d'une variable continue avec une fonction de deux variables continues est continue : la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1.3 Dérivées partielles

But : généraliser la notion de dérivée aux fonctions de deux variables.
Dans toute la suite $I \times J$ désigne un pavé ouvert.

1.3.1 Dérivées partielles d'ordre 1

Définition 1.10 (Dérivées partielles d'ordre 1)

Soient $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(x_0, y_0) \in I \times J$.

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la première variable en** (x_0, y_0) si l'application partielle $f_{y=y_0}$ est dérivable en x_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de $f_{y=y_0}$ en x_0 est noté :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou parfois} \quad \partial_1(f)(x_0, y_0).$$

- On dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la deuxième variable en** (x_0, y_0) si l'application partielle $f_{x=x_0}$ est dérivable en y_0. Dans ce cas, le nombre dérivé de $f_{x=x_0}$ en y_0 est noté :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{ou parfois} \quad \partial_2(f)(x_0, y_0).$$

Définition 1.11

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable** et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : I \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_1(f)(x, y). \end{aligned}$$

- Si f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable en tout point, on appelle **dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la deuxième variable** et on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ la fonction :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} : I \times J &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \partial_2(f)(x, y). \end{aligned}$$

Méthode 1.1

D'un point de vue pratique, pour calculer les dérivées partielles d'une fonction f, on laisse tomber les indices (x_0 devient x, y_0 devient y). Pour dériver une « formule » par rapport à x, on considère que y est constant (non variable donc) et on dérive, comme d'habitude, la formule de la seule variable réelle restante (x).

Exemple 1.12. Calcul des dérivées partielles de :

1. La fonction f définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1.$$

2. La fonction g définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = e^{x^2+y^2}.$$

Définition 1.12 (Fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.
On dit que f est de **classe** C^1 **sur** $I \times J$ si elle admet des dérivées partielles sur $I \times J$ et que les dérivées partielles sont continues sur $I \times J$.

Exemple 1.13 (Admis)**.**

1. Les fonctions polynomiales sont C^1.
2. Somme/produit/quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions C^1 est C^1.
3. Composer une fonction C^1 d'une variable continue avec une fonction C^1 de deux variables continues est C^1 : la fonction $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2 + 1)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.1 (Développement limité d'ordre 1)

Soient $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^1 sur $I \times J$ et $(x_0, y_0) \in I \times J$. Alors on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o\left(\| (h,k) \|\right).$$

Cette expression est appelée **développement limité d'ordre 1 de f en** (x_0, y_0) et est unique.

Remarque 1.3.

1. De manière équivalente, le développement limité en (x_0, y_0) s'écrit aussi :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\| (x - x_0, y - y_0) \|\right).$$

2. Il s'agit de l'analogue pour les fonctions de deux variables du développement limité d'ordre 1 pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. Graphiquement, l'équation $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ est l'équation du plan tangent au graphe de f au point de coordonnées $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Définition 1.13 (Gradient)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles en $(x_0, y_0) \in I \times J$.
On appelle **gradient de f en** (x_0, y_0) le vecteur de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, noté $\nabla(f)(x_0, y_0)$ (se lit "nabla"), défini par :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.4. Graphiquement, la direction du gradient de f en un point (x_0, y_0) est la direction de plus forte variation de f.

Théorème 1.0

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et x, y deux fonctions de dérivables sur un intervalle T et à valeurs dans I et J respectivement. Alors la fonction $h : T \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in T, \quad h(t) = f(x(t), y(t))$$

est dérivable sur T et :

$$\forall t \in T, \quad h'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Preuve : Soit $t_0 \in T$ et notons $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$. On fait le DL1 de f :

$$\begin{aligned}
h(t+h) &= f(x(t+h), y(t+h)) \\
&= h(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))(x(t+h) - x(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))(y(t+h) - y(t)) + o\left(\| \, . \, \|\right) \\
&= h(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))(x'(t)h + o(h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))(y'(t)h + o(h)) + o\left(\| \, . \, \|\right) \\
&= h(t) + \left(x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right) h + o(h) + o(\| \, . \, \|).
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
o(\| \, . \, \|) &= o(\| \, (x(t+h) - x(t), y(t+h) - y(t)) \, \|) \\
&= o(\| \, (x'(t)h + o(h), y'(t)h + o(h)) \, \|) \\
&= o(h).
\end{aligned}$$

□

Exemple 1.14. Cas où $x(t), y(t))$ est à valeurs dans une ligne de niveau et orthogonalité du gradient.

1.3.2 Fonctions de classe C^2

Définition 1.14 (Dérivées partielles d'ordre 2)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles d'ordre 1.
On dit que f admet des **dérivée partielle d'ordre** 2 **sur** $I \times J$ si

- f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $I \times J$,
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ admettent des dérivées partielles sur $I \times J$.

Dans ce cas, on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}.$$

On dit que f est **de classe** C^2 **sur** $I \times J$ si, de plus, les quatre dérivées partielles d'ordre 2 sont continues sur $I \times J$.

Exemple 1.15 (Admis)**.**

1. Les fonctions polynomiales sont C^2.
2. Somme/produit/quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions C^2 est C^2.
3. Composer une fonction C^2 d'une variable continue avec une fonction C^2 de deux variables continues est C^2 : la fonction $(x, y) \mapsto \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.16. Dérivée d'ordre 2 (surtout les dérivées croisées) sur les exemples suivants :

1. $f_1 : (x, y) \mapsto y^3 - 2xy^2 + 3x^2y^2 + 1$,

2. $f_2 : (x, y) \mapsto e^x \sin(xy)$,
3. $f_3 : (x, y) \mapsto e^{x^2+y^2}$.

Théorème 1.0 (de Schwarz)

Soit f une fonction de classe C^2 sur $I \times J$. Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

1.4 Extrema des fonctions de deux variables

Définition 1.15 (Maximum, minimum)

Soit f une fonction de deux variables définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$.

- On dit que f admet un **minimum local en** $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe un pavé ouvert $I \times J$ tel que :

$$\forall (x, y) \in (I \times J) \cap D \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

  Le minimum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.
- On dit que f admet un **maximum local en** $(x_0, y_0) \in D$ s'il existe un pavé ouvert $I \times J$ tel que :

$$\forall (x, y) \in (I \times J) \cap D \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

  Le maximum est dit **global** si l'inégalité est vraie pour tout $(x, y) \in D$.

Remarque 1.5.

1. Un minimum/ maximum global est toujours local mais la réciproque est fausse.
2. Une fonction n'admet pas nécessairement de minimum ou de maximum (qu'il soit local ou global).
3. Un maximum/minimum (qu'il soit local ou global) n'est pas nécessairement unique.

Exemple 1.17. Soit f la fonction définie sur U par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

où U est une partie de $\mathbb{R}^2$

1. On prend $U = \mathbb{R}^2$.
   La fonction f admet un minimum global en $(0, 0)$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0).$$

   La fonction f n'admet aucun maximum (local).

2. On prend $U = B_f((0,0),1)$.
   La fonction f admet un minimum global en $(0,0)$. La fonction f admet un maximum global en $(1,0)$.
   En effet, pour tout $(x,y) \in B_f((0,0),1)$,
   $$f(x,y) = x^2 + y^2 \leq 1 = f(1,0).$$
   Il n'y a pas unicité du maximum : tout point de la sphère de de centre $(0,0)$ et de rayon 1 est un maximum global.

Proposition 1.2 (Condition nécessaire d'existence d'un extremum)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un **pavé ouvert** $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.
Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) alors $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Preuve : Idée : utiliser DL1 avec $(h,k) = \pm \parallel \varepsilon \nabla f(x_0, y_0) \parallel$. $\square$

Remarque 1.6. Il s'agit d'une condition nécessaire et non suffisante : considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xy.$$
Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$
Donc : $\nabla(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En revanche, f n'a pas de minimum local $(0,0)$ car :
$$\forall r > 0,\ f(-r,r) = -r^2 < f(0,0).$$
Elle n'a pas non plus de maximum local car :
$$\forall r > 0,\ f(r,r) = r^2 > f(0,0).$$

Définition 1.16 (Point critique)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in I \times J$.
On dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f si $\nabla(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 1.7. Autrement dit, les extrema sont à rechercher parmi les points critiques.

Méthode 1.2 (Étude des extremas)

Étant donnée une fonction f définie sur un pavé ouvert $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$.

1. On cherche les points critique en résolvant le système de deux inconnues à deux équations $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
   Attention, ce système n'est en général pas linéaire ! Attention aussi : un point critique n'est pas nécessairement un extremum !
2. Pour chaque point critique (x_0, y_0) trouvé, on étudie $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ pour déterminer si elle est de signe constant ou non.
   Cette partie, en général guidée, consiste souvent à faire apparaître des carrées par des factorisations plus ou moins astucieuses.

Exemple 1.18. Étude de $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$.

Méthode 1.3 (Déterminer si un extremum est global)

On considère une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

- Pour montrer que f possède un maximum global (resp. minimum global) en $(x_0, y_0) \in U$, il faut montrer que $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$) pour tout $(x, y) \in U$ (voir l'exemple **??**).
- Pour montrer que f n'a pas d'extremum global, l'énoncé suggère parfois de considérer deux fonctions g et h d'une variable telles que $t \mapsto f(g(t), h(t))$ possède une limite infinie ($-\infty$ pour contredire un minimum et $+\infty$ pour contredire un maximum).

Exemple 1.19. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xy^3 - x^2 - 3y^2 + 2xy + 1$. Montrons que f ne possède pas d'extremum global en considérant $y \mapsto f(1, y)$.

1. Supposons par l'absurde que f possède un maximum global en un point (x_0, y_0).
   On note $M = f(x_0, y_0)$. Alors :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \leq M.$$
   En particulier,
   $$\forall y \in \mathbb{R}, f(1, y) \leq M.$$
   Or $\lim\limits_{y \to +\infty} f(1, y) = \lim\limits_{y \to +\infty} y^3 - 3y^2 + 2y = +\infty$. Absurde !
   Ainsi, f ne possède pas de maximum global.
2. Supposons par l'absurde que f possède un minimum global en un point (x_0, y_0).
   On note $m = f(x_0, y_0)$. Alors :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq m.$$
   En particulier,
   $$\forall y \in \mathbb{R}, f(1, y) \geq m.$$
   Or $\lim\limits_{y \to -\infty} f(1, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} y^3 - 3y^2 + 2y = -\infty$. Absurde !
   Ainsi, f ne possède pas de minimum global.