Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025–2026

BCPST2 – Mathématiques

DS4- 3H00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

1. Le rang étant invariant par opérations élémentaires sur les lignes on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \leftrightarrow L_2 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

2. On remarque que :

$$\begin{aligned}
E = \left\{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} &= \left\{\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b & -b & -2b \\ 2b & -b & -4b \\ -b & b & 3b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\
&= \mathrm{Vect}(I, A).
\end{aligned}$$

Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. D'après la question précédente, la famille (I, A) est une famille génératrice de E. Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires, c'est donc un famille libre. Ainsi (I, A) est une base de E. Cela permet de dire que E est de dimension finie et que sa dimension est égale à 2.

4. **(a)** Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
X \in F \iff AX = \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 2z & = & x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & y \\ -x & + & y & + & 3z & = & z \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff & x - y - 2z = 0 \\
\iff & x = y + 2z \\
\iff & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $F = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel.

(b) D'après la question précédente, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F. Comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre. Ainsi $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F. Donc F est de dimension finie et sa dimension vaut 2.

(c) D'après la question précédente, l'équation $(A - I)X = 0$ admet une infinité de solution : le système n'est pas de Cramer. La matrice $A - I$ n'est donc pas inversible.

5. **(a)** Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$
\begin{aligned}
X \in G \iff AX = 2X &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 2z & = & 2x \\ 2x & - & y & - & 4z & = & 2y \\ -x & + & y & + & 3z & = & 2z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & 4z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y + z \\ y & = & -2z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -2z \end{array}\right. \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Donc $G = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un espace vectoriel. De plus, $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de G formée d'un unique vecteur non nul. Ainsi $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de G. Donc G est de dimension finie et sa dimension vaut 1.

(b) Soit $X \in F \cap G$. Alors $AX = X$ car $X \in F$ et $AX = 2X$ car $X \in G$. Donc $2X = X$, c'est-à-dire, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi : $F \cap G \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Réciproquement, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \cap G$. Ainsi, on a bien $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) D'après les questions précédentes, on a $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or le membre de droite de cette égalité appartient à G et le membre de gauche appartient à F. Par conséquent, $\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \cap G$. D'après la question précédente, on a donc :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \lambda_1 = 0.$$

Comme on a $\lambda_1 = 0$ et

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la famille $\mathcal{B}_1$ est libre, cela entraîne que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a ainsi montré que si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ est tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Autrement dit, la famille $\mathcal{B}$ est libre et c'est donc une base d'après ce qui a été dit ci-dessus. De plus, comme $\mathcal{B}$ est de cardinal 3 et que $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, alors c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(d) On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(0,1,0)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base, il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (\star)$$

Or

$$\begin{aligned}
(\star) &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 1 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -3\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & -1 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 1 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda_1 & & & & & = & -2 \\ -2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 1 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & 2 \\ \lambda_2 & = & 5 \\ \lambda_3 & = & -1 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2.
\end{aligned}$$

Donc le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(2,5,-1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

6. (a) Il suffit de montrer que $P\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\-2 & 3 & 4\\1 & -1 & -1\end{pmatrix} = I_3$ ce qui se vérifie par un simple calcul.

(b) On trouve

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

7. (a) Remarquons que $M(a,b) = aI + bA$. Par conséquent :

$$P^{-1}M(a,b)P = P^{-1}(aI+bA)P = aP^{-1}IP+bP^{-1}AP = aI+bD = \begin{pmatrix}a+2b & 0 & 0\\0 & a+b & 0\\0 & 0 & a+b\end{pmatrix}.$$

(b) Supposons que $M(a,b)$ est inversible. Alors

$$D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$$

est inversible en tant que produit de matrices inversibles.

Réciproquement, supposons que $D(a, b)$ est inversible. Comme $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$ donc $M(a, b)$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles.

Finalement, $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ l'est.

Or, $D(a, b)$ est inversible si et seulement si $a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Donc, $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$.

(c) On rappelle que $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$. Donc

$$\begin{aligned}
(M(a,b))^2 = I &\iff (PD(a,b)P^{-1})^2 = I \\
&\iff PD(a,b)P^{-1}PD(a,b)P^{-1} = I \\
&\iff PD(a,b)D(a,b)P^{-1} = I \\
&\iff P(D(a,b))^2P^{-1} = I \\
&\iff (D(a,b))^2P^{-1} = P^{-1} \quad \text{(multiplication à gauche par } P^{-1}\text{)} \\
&\iff (D(a,b))^2 = P^{-1}P \quad \text{(multiplication à droite par } P\text{)} \\
&\iff (D(a,b))^2 = I.
\end{aligned}$$

Or, $(D(a, b))^2 = I$ si et seulement si $(a + 2b)^2 = 1$ et $(a + b)^2 = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
(D(a,b))^2 = I &\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & 1 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & 1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array}\right. \\
&\quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ a & + & b & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} a & + & 2b & = & -1 \\ a & + & b & = & -1 \end{array}\right. \\
&\iff (a,b) \in \{(1,0), (-3,2), (3,-2), (-1,0)\}.
\end{aligned}$$

Problème

Dans tout ce problème, p un entier relatif et on note S_p la série :

$$S_p = \sum_{n \geq 1} n^p.$$

Partie A : étude de la série S_p

1. On suppose dans cette question que $p \geq 0$.

— Si $p = 0$ alors la suite $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

— Si $p > 0$ alors la suite $(n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Dans tous les cas, la série est grossièrement divergente.

2. On suppose dans cette question que $p < 0$.

(a) On a :

— $S_{-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente ;

— $S_{-2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

(b) Soit $p \leq -2$ alors :

$$\forall n \geq 1, \quad n^p \leq \frac{1}{n^2}.$$

Les séries S_p et S_{-2} étant à termes positifs et comme S_{-2} est convergente, on en déduit par le théorème de comparaison, que S_p converge.

Partie B : Factorisation d'un polynôme

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
On considère la famille $\mathcal{F} = (1, 1+2X, 1+3X+3X^2)$.

3. (a) La matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ qui est déjà échelonnée.
Ainsi :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(M) = 3.$$

(b) Comme $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Car}(\mathcal{F})$ alors $\mathcal{F}$ est libre.
Comme $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \dim(\mathbb{R}_2[X])$ alors $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
Ainsi $\mathcal{F}$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) En développant :

$$(1+X)^2 = 1 + 2X + X^2$$

donc ses coordonnées dans la base canonique sont $(1, 2, 1)$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(1+X)^2 = a \cdot 1 + b \cdot (1+2X) + c \cdot (1+3X+3X^2) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a+b+c & = & 1 \\ 2b+3c & = & 2 \\ 3c & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 1/6 \\ b & = & 1/2 \\ c & = & 1/3 \end{array} \right.$$

Ainsi les coordonnées de $(1+X)^2$ dans la base $\mathcal{F}$ sont $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

4. On a

$$\frac{1}{6}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 = \frac{1}{6}X(1+3X+2X^2) = \frac{1}{6}X(X+1)(2X+1).$$

Partie C : Calcul de l'équivalent d'une somme

Dans cette partie, on considère $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_{p,n}$ la somme partielle de rang n de la série S_p :

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

5. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante et positive.

(a) La fonction f étant continue positive sur $[0,1]$ l'intégrale est bien définie et par positivité :

$$\int_0^1 f(t)dt \geq 0.$$

avec égalité si et seulement si f est nulle sur $[0,1]$. Comme f est strictement croissante elle n'est pas nulle donc :

$$\int_0^1 f(t)dt > 0.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est bien définie et strictement positive.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right] \subset [0,1]$ donc par croissance de f sur $[0,1]$:

$$\forall x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant l'inégalité ci-dessus entre $\dfrac{k-1}{n}$ et $\dfrac{k}{n}$ $(k \in [\![1,n]\!])$ on obtient :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En sommant ensuite ces inégalité pour $k = 1, \ldots, n$, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or d'après la relation de Chasles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ et en effectuant un changement d'indice dans le membre de gauche, on trouve bien :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(0) - f(1) \leq I_n \leq \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ce qui se réécrit :

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{I_n} \leq 1 + \frac{f(1) - f(0)}{I_n}.$$

D'après la question **5.(a)**, $\int_0^1 f(x)dx > 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{f(1)-f(0)}{I_n} = 1$ et par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)}{I_n} = 1.$$

Cela montre :

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n.$$

6. Soit $f : x \mapsto x^p$ qui est bien continue, positive et strictement croissante (car $p \in \mathbb{N}^*$). D'après la question précédente, on a donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^p}{n^p} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^1 x^p dx = \frac{n}{p+1}$$

Par compatibilité des équivalents avec le produit :

$$\sum_{k=1}^n k^p \underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^1 x^p dx = \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

7. On considère la famille de polynômes $(P_j)_{j\in[\![1,p+1]\!]}$ définie par :

$$\forall j \in [\![1, p+1]\!], \quad P_j = (1+X)^j - X^j.$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^p)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.

(a) Soit $j \in [\![1, p+1]\!]$. Par la formule du binôme de Newton on a :

$$\begin{aligned} P_j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} X^k - X^j &= X^j + \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} X^k - X^j \\ &= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} X^k. \end{aligned}$$

La plus grand puissance de X apparaissant dans cette somme est $j-1$ avec comme coefficient $\binom{j}{j-1} = j \neq 0$. Donc le degré de P_j est $j-1$.

(b) Soit $j \in [\![1, p+1]\!]$.

D'après la question précédente, les coordonnées de P_j dans $\mathcal{B}$ sont

$$\left(\binom{j}{0}, \binom{j}{1}, \ldots, \binom{j}{j-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{p+1-j}\right).$$

(c) La famille $(P_j)_{j\in[\![1,p+1]\!]}$ est constituée de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_p[X]$ de degré deux à deux distincts donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}_p[X]$.

De plus elle est formée de $p+1 = \dim(\mathbb{R}_p[X])$ vecteurs. Donc c'est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

(d) D'après la question **7(b)**

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & & & & \binom{p}{1} & \binom{p+1}{1} \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & p-1 & \binom{p}{p-2} & \vdots \\ \vdots & & & & & 0 & p & \binom{p+1}{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & p+1 \end{pmatrix}$$

Comme la famille $(P_j)_{j\in[\![1,p+1]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$ elle est de rang $p+1$ donc A_p aussi.

En particulier, $A_p \in \mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ est de rang $p+1$ donc inversible.

(e) La famille $(P_j)_{j\in[\![1,p+1]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. En notant $a_1, \dots, a_{p+1}$ les coordonnées de $(1+X)^p$ dans cette base on a :

$$(1+X)^p = \sum_{j=1}^{p+1} a_j P_j.$$

(f) On a :

$$\begin{aligned} S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^p &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{p+1} a_j P_j(i) \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} a_j \sum_{i=0}^{n-1} P_j(i) \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} a_j \sum_{i=0}^{n-1} ((1+i)^j - i^j) \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} a_j n^j \quad \text{par télescopage} \\ &= Q_p(n). \end{aligned}$$

8. Dans cette question, on se place dans le cas $p=2$.

(a) On remarque que la famille $\mathcal{F}$ de la partie B n'est autre que (P_1, P_2, P_3).

Les réels a_1, a_2, a_3 sont donc les coordonnées de $(1+X)^2$ dans la base $\mathcal{F}$ calculées en **3.(c)**.

(b) Le polynôme Q_2 est alors celui de la question **4** :

$$Q_2 = \frac{1}{6}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 = \frac{1}{6}X(1+3X+2X^2) = \frac{1}{6}X(X+1)(2X+1).$$

D'après la question **7.(f)** on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n,2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 = Q_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

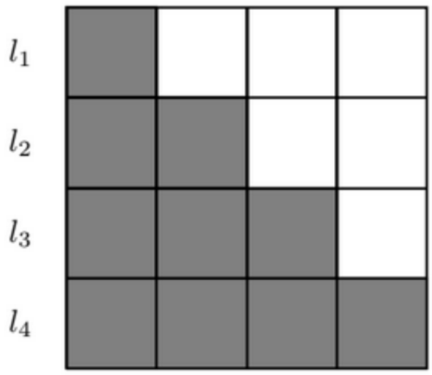
Partie C : calcul d'une probabilité

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}^*$.
On considère un carré de côté $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un quadrillage dans lequel les cases sont grises ou blanches :

— les cases situées sur ou sous une diagonale du carré sont grises ;

— les autres sont blanches.

La figure ci-dessous illustre le cas où $n = 4$:



Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note ℓ_k la k-ème ligne du carré.
On considère l'expérience aléatoire suivante :

— on choisit au hasard une ligne du carré de façon équiprobable,

— on choisit successivement et indépendamment p cases sur cette lignes de façon équiprobable également.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note L_k l'événement « les cases sont choisies sur la ligne ℓ_k ».
On note également A_n l'événement « on a choisit au moins une case blanche ».

9. D'après l'énoncé, les lignes sont choisies de manière équiprobable donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(L_k) = \dfrac{1}{n}$.

10. **(a)** L'événement $\overline{A}_n$ est l'événement « toutes les cases choisies sont grises ».

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. La ligne ℓ_k contient k cases grises donc la probabilité, sachant qu'on a choisit la ligne k, de choisir une case grise est $\dfrac{k}{n}$.

Par indépendance du choix des cases, on a donc

$$\mathbb{P}_{L_k}(\overline{A}_n) = \underbrace{\frac{k}{n} \times \cdots \times \frac{k}{n}}_{p\text{fois}} = \frac{k^p}{n^p}.$$

Comme la famille $(L_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\overline{A}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(L_k)\mathbb{P}_{L_k}(\overline{A}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{k^p}{n^p} = \frac{1}{n^{p+1}} S_{n,p}.$$

On en déduit : $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{n^{p+1}} S_{n,p}$.

(c) D'après la question **6**, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{p+1}} S_{n,p} = \frac{1}{p+1}$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}.$$