Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025–2026

BCPST2 – Mathématiques

DS4- 3H00

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

À tout couple (a, b) de réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}.$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$E = \left\{ M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

4. **(a)** Montrer que l'ensemble $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$ est un espace vectoriel.

(b) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F et en déduire sa dimension.

(c) Montrer que $A - I$ n'est pas inversible.

5. **(a)** Montrer que l'ensemble $G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$ est un espace vectoriel, déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G et en déduire sa dimension.

(b) Montrer que $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ constituée des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et des vecteurs de $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(d) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, puis celle du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

6. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que P est inversible et que son inverse est $\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\-2 & 3 & 4\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

   (b) Calculer $P^{-1}AP$. On notera D cette matrice.

7. Soi $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Prouver que la matrice $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale.

   (b) Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

   (c) Prouver que $(M(a,b))^2 = I$ si et seulement si $(D(a,b))^2 = I$
   En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant
   $$(M(a,b))^2 = I.$$

Problème

Dans tout ce problème, p un entier relatif et on note S_p la série :
$$S_p = \sum_{n\geq 1} n^p.$$

Partie A : étude de la série S_p

1. On suppose dans cette question que $p \geq 0$.
   Déterminer la nature de S_p.

2. On suppose dans cette question que $p < 0$.

   (a) Rappeler la nature de S_p lorsque $p = -1$ et $p = -2$.

   (b) En déduire que S_p converge pour tout $p \leq -2$.

Partie B : Factorisation d'un polynôme

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
On considère la famille $\mathcal{F} = (1, 1+2X, 1+3X+3X^2)$.

3. (a) Calculer le rang de $\mathcal{F}$.

   (b) En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

   (c) Déterminer les coordonnées de $(1+X)^2$ dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base $\mathcal{F}$.

4. On note (a,b,c) les coordonnées de $(1+X)^2$ dans la base $\mathcal{F}$ trouvées à la question précédente.
   Écrire le polynôme $aX + bX^2 + cX^3$ sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1.

Partie C : Calcul de l'équivalent d'une somme

Dans cette partie, on considère $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_{p,n}$ la somme partielle de rang n de la série S_p :

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante et positive.

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n \int_0^1 f(t)dt$ est bien définie et strictement positive.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \forall x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un encadrement de $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{I_n}$ et en déduire :

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} I_n.$$

6. En choisissant judicieusement f, montrer que :

$$S_{n,p} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

7. On considère la famille de polynômes $(P_j)_{j \in [\![1,p+1]\!]}$ définie par :

$$\forall j \in [\![1,p+1]\!], \quad P_j = (1+X)^j - X^j.$$

On note $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^p)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.

(a) Soit $j \in [\![1,p+1]\!]$. Déterminer le degré de P_j.
Le résultat sera rigoureusement justifié.

(b) Soit $j \in [\![1,p+1]\!]$. Déterminer les coordonnées de P_j dans la base $\mathcal{B}$.

(c) Montrer que la famille $(P_j)_{j \in [\![1,p+1]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

(d) Écrire la matrice A_p de la famille $(P_j)_{j \in [\![1,p+1]\!]}$ dans la base canonique et donner son rang.
En déduire qu'elle est inversible (*on ne demande pas de déterminer son inverse*).

(e) Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_{p+1}$ tels que :

$$(1+X)^p = \sum_{j=1}^{p+1} a_j P_j.$$

On ne demande pas, dans cette question, de déterminer la valeurs des a_j.

(f) Soit $Q_p = \sum_{j=1}^{p+1} a_j X^j$. Montrer que $S_{n,p} = Q_p(n)$.

8. Dans cette question, on se place dans le cas $p = 2$.

(a) À l'aide de la partie B, trouver la valeur des réels a_1, a_2, a_3 de la question **7.(e)**.

(b) En déduire, à l'aide des question précédentes, une expression explicite de $S_{n,2}$ en fonction de n.

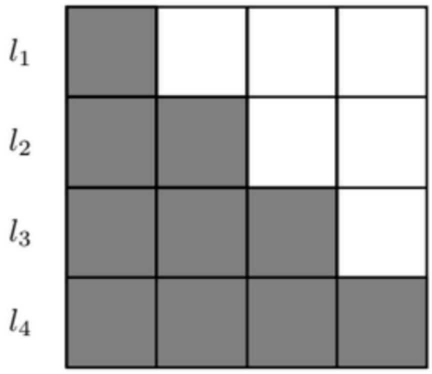
Partie C : calcul d'une probabilité

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}^*$**.**
On considère un carré de côté $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un quadrillage dans lequel les cases sont grises ou blanches :

— les cases situées sur ou sous une diagonale du carré sont grises ;

— les autres sont blanches.

La figure ci-dessous illustre le cas où $n = 4$:



Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note ℓ_k la k-ème ligne du carré.
On considère l'expérience aléatoire suivante :

— on choisit au hasard une ligne du carré de façon équiprobable,

— on choisit successivement et indépendamment p cases sur cette lignes de façon équiprobable également.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note L_k l'événement « les cases sont choisies sur la ligne ℓ_k ».
On note également A_n l'événement « on a choisit au moins une case blanche ».

9. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(L_k)$.

10. **(a)** Exprimer l'événement $\overline{A}_n$ à l'aide d'une phrase.

(b) Calculer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la probabilité $\mathbb{P}_{L_k}(\overline{A}_n)$ et en déduire $\mathbb{P}(\overline{A}_n)$ puis $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de $S_{n,p}$.

(c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ en fonction de p.