Chapitre 9

Variables aléatoires à densité

9.1 Variables aléatoires à densité

9.1.1 Densité

Définition 9.1 (Densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est positive,
- f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

9.1.2 Variables aléatoires à densité

Définition 9.2 (Variables aléatoires à densité)

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que X est une variable aléatoire à densité s'il existe une densité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

où F_X désigne la fonction de répartition de X.
On dit que f est une densité de X.

Remarque 9.1.

1. Il n'y a pas unicité d'une densité f associé à une variable aléatoire à densité. Si f est une densité de X alors toute densité qui coïncide avec f partout sauf éventuellement en un nombre fini de points est encore une densité de f.
2. La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est conséquence du dernier point de la définition d'une densité.

Théorème 9.1 (Existence des variables aléatoires à densité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Si f est une densité alors il existe une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont f est une densité.

Proposition 9.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de densité f.

1. La fonction de répartition F_X de X est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction F_X est dérivable en tout réel x où f est continue et dans ce cas $F'_X(x) = f(x)$.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.
4. Pour tout $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et tout intervalle I d'extrémités a et b on a :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_a^b f(t)dt.$$

Proposition 9.2

Une variable aléatoire X est à densité si et seulement si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Dans ce cas, toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive et qui coïncide avec F'_X partout sauf éventuellement en un nombre fini de points est une densité de X.

Remarque 9.2.

1. Dans le contexte des variables à densité, « trouver la loi de X » consiste à montrer que X est à densité et à en donner une densité.

2. La fonction de répartition caractérise aussi la loi (deux variables aléatoires suivent la même loi si et seulement si elles ont la même fonction de répartition).

3. Pour une variable aléatoire à densité, la notion de support (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire) est plus compliquée à définir que pour les variables finis.

   Il s'agit du complémentaire de la réunion des intervalles ouverts sur lesquels la fonction de répartition est constantes.

Théorème 9.2 (Caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité)

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$,
- F est continue sur $\mathbb{R}$,
- F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Alors F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

9.2 Espérance et variance

9.2.1 Espérance

Définition 9.3 (Espérance d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité dont on note f une densité de X.
On dit que X possède une espérance si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument.
Dans ce cas, l'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$ est le réel défini par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt.$$

Proposition 9.3

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité sur un espace probabilisé.

1. (**Linéarité**) Si X et Y possèdent une espérance alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ la variable $\lambda X + \mu Y$ possède une espérance et :
$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$
2. (**Positivité**) Si X est positive et possède une espérance alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
3. (**Croissance**) Si X et Y possèdent une espérance et que $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Théorème 9.3 (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire à densité et soit f une densité de X.
Si g est une fonction continue sur un intervalle I contenant le support de X alors la variable aléatoire $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_I g(t)f(t)dt$ converge absolument. Dans ce cas :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_I g(t)f(t)dt.$$

Proposition 9.4 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire à densité positive et possédant une espérance. Alors :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

9.2.2 Variance

Définition 9.4 (Moments d'une variable aléatoire à densité)

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire à densité dont on note f une densité de X. On dit que X possède un **moment d'ordre** r si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt$ converge absolument. On note alors

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)dt.$$

Définition 9.5 (Variance/écart-type d'une variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité de densité f.

- Si X possède un moment d'ordre 2 alors X possède une espérance.
- Dans ce cas, $X - \mathbb{E}(X)$ possède un moment d'ordre 2 que l'on appelle la **variance de** X, notée $\mathbb{V}(X)$:
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Proposition 9.5 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire à densité possédant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 9.6

Soit X une variable aléatoire à densité possédant une variance.

1. $\mathbb{V}(X)$ est un réel positif et on appelle **écart-type**, noté $\sigma(X)$ le réel :
$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$
2. Pour tous réels a et b, la variable aléatoire $aX + b$ possède une variance et
$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Définition 9.6 (Variable aléatoire centrée/réduite)

Soit X une variable aléatoire à densité.

- On dit que X est **centrée** si X possède une espérance nulle.
- On dit que X est **réduite** si X possède une variance égale à 1.
- Si X une variable à densité possédant une variance non nulle, on appelle variable aléatoire centrée réduite associée à X la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.

Théorème 9.4 (Inégalité de Bienaymée-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire à densité possédant une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

9.2.3 Indépendance

Définition 9.7 (Indépendance)

Soient X, Y, $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ des variables aléatoires à densité définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- On dit que X et Y sont **indépendantes** (pour la probabilité P) si pour tous intervalles réels I et J on a :
$$P\left([X \in I] \cap [Y \in J]\right) = P\left([X \in I]\right) P\left([Y \in J]\right).$$
- On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tous intervalles I_1, …, I_n de $\mathbb{R}$ on a :
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left([X_k \in I_k]\right).$$
- On dit que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendantes** si toute sous famille finie de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mutuellement indépendante au sens du point précédent.

Proposition 9.7 (Lemme des coalitions)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ des variables aléatoires à densité mutuellement indépendantes.
Soit $(I_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ $(p \leq n)$ une partition de $[\![1, n]\!]$.
Si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, Y_k est une variable aléatoire fonction des $(X_i)_{i\in I_k}$ alors les variables $Y_1, \ldots, Y_p$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple 9.1 (Loi du minimum de deux variables aléatoires réelles indépendantes).
Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes et soit $Z = \min(X, Y)$.
Exprimer la fonction de répartition F_Z de Z en fonction des fonctions de répartition F_X de X et F_Y de Y.

1. On montre que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $[Z > t] = [X > t] \cap [Y > t]$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $\omega \in \Omega$
   $$\begin{aligned} \omega \in [Z > t] \iff Z(\omega) > t \iff \min(X(\omega), Y(\omega)) > t &\iff X(\omega) > t \quad \text{et} \quad Y(\omega) > t \\ &\iff \omega \in [X > t] \cap [Y > t]. \end{aligned}$$
   Ainsi $[Z > t] = [X > t] \cap [Y > t]$
2. On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([Z > t]) = \mathbb{P}([X > t])\mathbb{P}([Y > t])$.
   Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a
   $$\mathbb{P}([Z > t]) = \mathbb{P}([X > t] \cap [Y > t]) = \mathbb{P}([X > t])\mathbb{P}([Y > t])$$
   car $[X > t] = \big[X \in]t, +\infty[\big]$ et $[Y > t] = \big[Y \in]t, +\infty[\big]$.
3. On trouve la fonction de répartition de F_Z.
   Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$ et de même pour F_X et F_Y. Donc
   $$\begin{aligned} F_Z(t) = 1 - \mathbb{P}([Z > t]) = 1 - \mathbb{P}([X > t])\mathbb{P}([Y > t]) &= 1 - (1 - \mathbb{P}([X \leq t]))(1 - \mathbb{P}([Y \leq t])) \\ &= 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)). \end{aligned}$$
4. On étudie ensuite si Z est à densité en vérifiant si F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple 9.2 (Loi du maximum de deux variables aléatoires réelles indépendantes).
Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes et soit $Z = \max(X, Y)$.
Exprimer la fonction de répartition F_Z de Z en fonction des fonctions de répartition F_X de X et F_Y de Y.

1. On montre que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $[Z \leq t] = [X \leq t] \cap [Y \leq t]$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $\omega \in \Omega$
   $$\begin{aligned} \omega \in [Z \leq t] \iff Z(\omega) \leq t \iff \max(X(\omega), Y(\omega)) \leq t &\iff X(\omega) \leq t \quad \text{et} \quad Y(\omega) \leq t \\ &\iff \omega \in [X \leq t] \cap [Y \leq t]. \end{aligned}$$
   Ainsi $[Z \leq t] = [X \leq t] \cap [Y \leq t]$
2. On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}([Z \leq t]) = \mathbb{P}([X \leq t])\mathbb{P}([Y \leq t])$.
   Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a
   $$\mathbb{P}([Z \leq t]) = \mathbb{P}([X \leq t] \cap [Y \leq t]) = \mathbb{P}([X \leq t])\mathbb{P}([Y \leq t]).$$
3. On trouve la fonction de répartition de F_Z.
   Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t)$ et de même pour F_X et F_Y. Donc
   $$F_Z(t) = \mathbb{P}([X \leq t])\mathbb{P}([Y \leq t]) = F_X(t)F_Y(t).$$
4. On étudie ensuite si Z est à densité en vérifiant si F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition 9.8 (Espérance et variance de variables indépendantes)

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité **indépendantes** définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Si X et Y admettent une espérance alors XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
2. Si X et Y admettent une variance alors $X+Y$ admet une variance et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Remarque 9.3. Plus généralement, soit X_1, ..., X_n des variables aléatoires à densité **mutuellement indépendantes** définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k possède une espérance alors $X_1 \times \cdots \times X_n$ admet une espérance et $\mathbb{E}(X_1 \times \cdots \times X_n) = \mathbb{E}(X_1) \times \cdots \times \mathbb{E}(X_n)$.
2. Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k possède une variance alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et $\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n)$.

9.3 Lois usuelles à densité

9.3.1 Lois uniformes

Définition 9.8 (Lois uniformes)

Soit $a < b$ deux nombres réels.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme sur** $[a, b]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ si X a pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} .$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ alors X possède une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

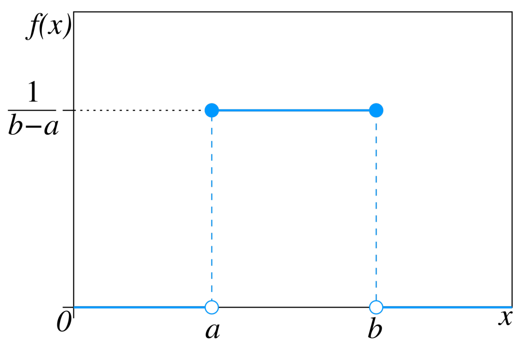

FIGURE 9.1 – Densité de la loi $\mathcal{U}([a, b])$.

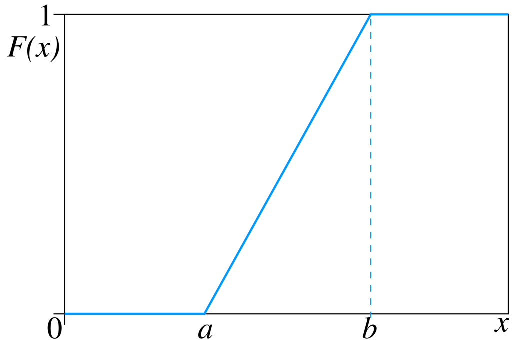

FIGURE 9.2 – Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([a, b])$.

9.3.2 Lois normales

Définition 9.9 (Loi normale centrée réduite)

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale centrée réduite** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ si X a pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X possède une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = 1.$$

Proposition 9.9

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_X(-x) = 1 - F_X(x).$$

En particulier, $F_X(0) = \frac{1}{2}$.

Définition 9.10 (Lois normales)

Soit μ et $\sigma > 0$ deux réels.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale de paramètres** μ **et** σ^2 et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si X a pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors X possède une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

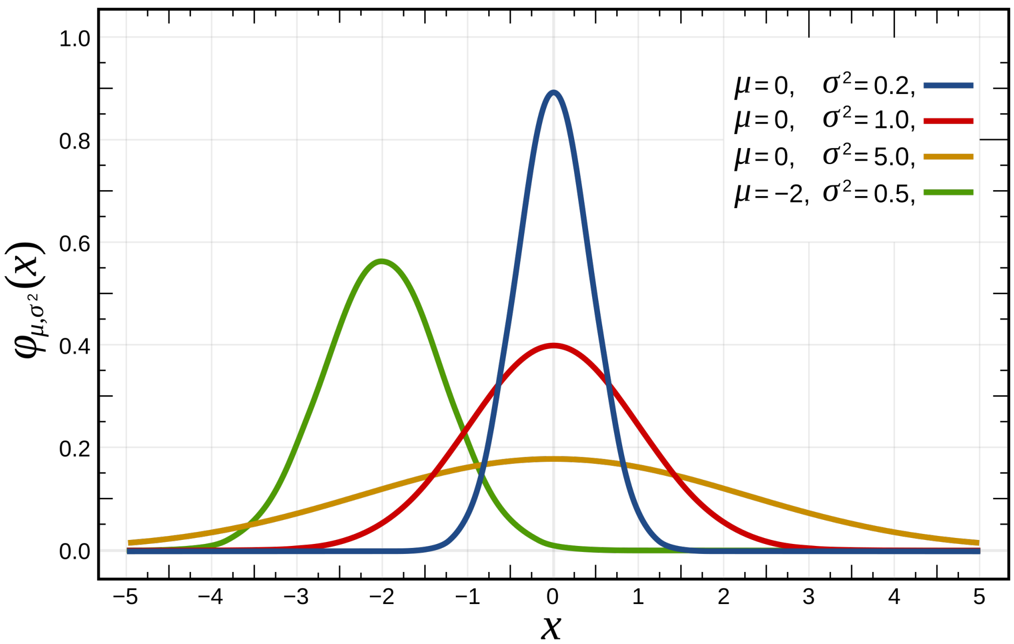

FIGURE 9.3 – Densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Proposition 9.10

Soient μ, σ, a et b des nombres réels tels que : $\sigma > 0$ et $a \neq 0$. Soit X une variable aléatoire. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Longleftrightarrow aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

9.3.3 Lois exponentielles

Définition 9.11 (Lois exponentielles)

Soit $\lambda > 0$.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi **exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ si X a pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors la fonction de répartition de X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors X possède une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

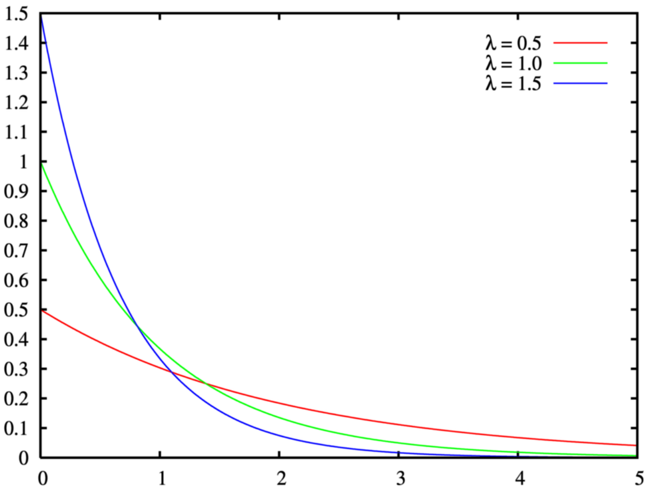

Figure 9.4 – Densité de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

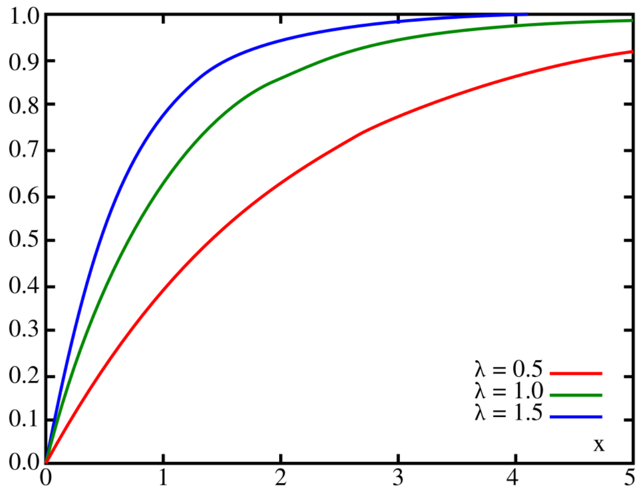

Figure 9.5 – Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition 9.11

Soit $\lambda > 0$ et X une variable de loi exponentielle de paramètre λ.
Alors :

$$\forall (s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \mathbb{P}_{[X \geq s]}(X \geq s+t) = \mathbb{P}(X \geq t).$$

9.4 Exemples de transfert

9.4.1 Étude de variables de la forme $g(X)$

But : étant donnée une variable à densité X de loi connue, déterminer la loi de $Y = g(X)$ où g est une fonction.

Méthode 9.1

1. On commence par déterminer le support (les valeurs prises) par Y (par exemple, si $Y = X^2$ alors Y ne prend que des valeurs positives).
2. Ensuite, on détermine la fonction de répartition de Y : pour tout $t \in \mathbb{R}$ on détermine $P(Y \leq t)$ à l'aide F_X en essayant d'écrire $[Y \leq t]$ sous la forme $[X \in I]$.
3. On cherche enfin à vérifier si F_Y est la fonction de répartition d'une variable à densité et, le cas échéant, calculer une densité de Y.

9.4.2 Somme de variables aléatoires à densité indépendantes

Proposition 9.12

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes à densité.
On considère f_X et f_Y une densité de X et Y respectivement.
Alors $X+Y$ est une variable aléatoire à densité et une densité de $X+Y$ est donnée par :

$$f_{X+Y} : t \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-x) f_Y(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t-x) f_X(x) dx.$$

Cette fonction est appelée le produit de convolution de f_X et f_Y et noté $f_X * f_Y$.

Proposition 9.13

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.
Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi $\mathcal{N}(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$.