Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025-2026

Mathématiques – TD9

Variables à densité

Correction de l'exercice 1.

1. — (a) La fonction F_X est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ donc est de classe C^1 (et a fortiori continue) sur ces intervalles.
   Sur $[0, 1]$, la fonction $x \mapsto x^3$ est de classe C^1.
   Ainsi F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.
   (b) On vient de voir que F_X est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.
   Étude de la continuité en 0. On a :
   $$\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = 0 = F_X(0) = \lim_{x\to 0^+} F_X(x).$$
   Ainsi F_X est continue en 0.
   Étude de la continuité en 1. On a :
   $$\lim_{x\to 1^-} F_X(x) = 1 = F_X(1) = \lim_{x\to 0^+} F_X(x).$$
   Ainsi F_X est continue en 1.
   Finalement F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi X est bien à densité.
   — Déterminons une densité de X. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$:
   $$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$
   Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
   est une densité de X.
2. — (a) La fonction F_X est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ donc est de classe C^1 (et a fortiori continue) sur ces intervalles.
   Sur $[0, 1[$, la fonction $x \mapsto 1 - x$ est de classe C^1 à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, F est donc de classe C^1 sur $[0, 1[$.
   Ainsi F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.
   (b) On vient de voir que F_X est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$.
   Étude de la continuité en 0. On a :
   $$\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = 0 = F_X(0) = \lim_{x\to 0^+} F_X(x).$$

Ainsi F_X est continue en 0.
Étude de la continuité en 1. On a :

$$\lim_{x\to 1^-} F_X(x) = 1 = F_X(1) = \lim_{x\to 0^+} F_X(x).$$

Ainsi F_X est continue en 1.
Finalement F_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi F_X est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X.

— Déterminons une densité de X. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$:

$$F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de X.

Correction de l'exercice 2.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est positive si et seulement si c est positif.
   Étudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ généralisée en $-\infty$ et $+\infty$.

   - Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$. Soit $x \in [0,+\infty[$. On a :

     $$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x ce^{-t}dt = \Big[-ce^{-t}\Big]_0^x = c - ce^{-x}.$$

     Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt = c$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est donc convergente et vaut c.
   - Comme f est paire, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ est aussi convergente et vaut c.

   Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt = 2c.$$

   La fonction f est donc une densité de probabilité si et seulement si c est positif et $2c = 1$ donc si et seulement si $c = \dfrac{1}{2}$.

2. Notons F_X la fonction de répartition de X et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^t dt & \text{si} x < 0 \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^t dt + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{0}^{x} e^{-t} dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

3. La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument.
   Or la fonction $t \mapsto |tf(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc cette intégrale est généralisée en $-\infty$ et $+\infty$.
   - Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|dt$. Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a alors :
     $$\int_{A}^{0} |tf(t)|dt = -\frac{1}{2}\int_{A}^{0} te^t dt.$$
     Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $[A, 0]$ donc par intégration par parties on obtient :
     $$\begin{aligned} \int_{A}^{0} |tf(t)|dt &= -\frac{1}{2}\int_{A}^{0} te^t dt \\ &= -\frac{1}{2}\left([te^t]_A^0 - \int_{A}^{0} e^t dt\right) \\ &= \frac{1}{2}(Ae^A + 1 - e^A). \end{aligned}$$
     Par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{0} |tf(t)|dt = \frac{1}{2}$.
     Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
   - Par parité de $t \mapsto |tf(t)|$, on déduit que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
   - Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |tf(t)|dt$ convergent donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$ converge. Ainsi X possède une espérance. De plus on a :
     $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} tf(t)dt + \int_{0}^{+\infty} tf(t)dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} |te^t|dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} |te^{-t}|dt \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. Comme la variable aléatoire X possède une espérance, d'après la formule de Koenig-Huygens elle admet une variance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge absolument.
Or la fonction $t \mapsto |t^2 f(t)|$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc cette intégrale est généralisée en $-\infty$ et $+\infty$.
   - Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |t^2 f(t)|dt$. Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a alors :
   $$\int_A^0 |t^2 f(t)|dt = \frac{1}{2}\int_A^0 t^2 e^t dt.$$
   Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe C^1 sur $[A, 0]$ donc par intégration par parties on obtient :
   $$\begin{aligned}\int_A^0 |tf(t)|dt &= \frac{1}{2}\int_A^0 t^2 e^t dt \\ &= \frac{1}{2}\left([t^2 e^t]_A^0 - \int_A^0 2te^t dt\right) \\ &= -\frac{1}{2}A^2 e^A - \int_A^0 te^t dt \\ &= -\frac{1}{2}A^2 e^A + Ae^A + 1 - e^A \quad \text{d'après les calculs de 1.}\end{aligned}$$
   Par croissance comparée, on a : $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 |t^2 f(t)|dt = 1$.
   Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^0 |t^2 f(t)|dt$ converge et vaut 1.
   - Par parité de $t \mapsto |t^2 f(t)|$, on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t^2 f(t)|dt$ converge aussi et vaut 1.
   - Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 |t^2 f(t)|dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t^2 f(t)|dt$ convergent donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2 f(t)|dt$ converge. Ainsi X possède un moment d'ordre deux donc une variance. De plus on a :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt &= \int_{-\infty}^0 t^2 f(t)dt + \int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt \\ &= 2.\end{aligned}$$
   Par la formule de Koenig-Huygens, on a donc :
   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2.$$

Correction de l'exercice 3. Soit c une constante réelle et f la fonction de variable réelle définie par
$$f = c.\left(\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{3}[} + \mathbf{1}_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]} + 2\mathbf{1}_{]\frac{2}{3},1]}\right)$$

1. Il est conseillé de tracer la représentation graphique de f ! On voit alors facilement (calcul d'aires de rectangles) que l'intégrale suivante converge et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \frac{7}{6}x.$$
Donc, si $c = \dfrac{6}{7}$ et seulement dans ce cas, f est positive, continue (sauf peut être aux points 0, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$ et 1) et par ailleurs, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$ et donc f est une densité de probabilité.
2. Il s'agit de primitiver la fonction f. Sachant que f est constante par intervalle, F, la fonction de répartition associée est continue, affine par intervalle (mêmes intervalles) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{c}{2}x & \text{si} \quad 0 \le x < 1/3 \\ \dfrac{c}{6} + c\left(x - \dfrac{1}{3}\right) & \text{si} \quad 1/3 \le x < 2/3 \\ \dfrac{c}{2} + 2c\left(x - \dfrac{2}{3}\right) & \text{si} \quad 2/3 \le x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad \ge 1 \end{cases}$$
3. On a donc :
$$\mathbb{P}(X \le \frac{2}{3}) = F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{c}{2} = \frac{3}{7}$$
et
$$\mathbb{P}(X > \frac{2}{3}) = 1 - F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{7}.$$
Ainsi le nombre X tiré au hasard suivant cette loi a plus de chances d'être $> \dfrac{2}{3}$ que d'être $\le \dfrac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 4.

1. La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}^*$. Étudions $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ généralisée en $-\infty$, 0 et $+\infty$.
   — Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ généralisée en $-\infty$ et 0. Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$ alors l'intégrale converge et vaut 0.
   — Étude de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$. Soit $A \in [0, +\infty[$. On a :
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)dx &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+x)^3}dx \\ &= 2\left[\frac{1}{-2(1+x)^2}\right]_0^A \\ &= 1 - \frac{1}{(1+A)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx = 1$.
L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge donc et vaut 1.

— Les intégrales $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ convergent donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et de plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0+1 = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable de densité f et notons F sa fonction de répartition. Alors, pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt &= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-\dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

2. La fonction f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$ donc d'après le théorème de transfert X possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.

La fonction $x \mapsto |xf(x)|$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ est impropre en $+\infty$. Soit $A\in[0,+\infty[$. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ étant de classe C^1 sur $[0,A]$ on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{2x}{(1+x)^3}dx &= \left[\frac{-x}{(1+x)^2}\right]_0^A - \int_0^A \frac{-1}{(1+x)^2}dx \\ &= -\frac{A}{(1+A)^2} + \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A \\ &= -\frac{A}{(1+A)^2} - \frac{1}{1+A} + 1. \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A |xf(x)|dx = 1$. La variable X possède donc une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+x)^3}dx = 1.$$

Comme X possède une espérance, d'après la formule de Koenig-Huygens et le théorème de transfert X possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge absolument.
Or :

$$|x^2 f(x)| = \frac{2x^2}{(1+x)^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}.$$

Les fonctions $x \mapsto |x^2 f(x)|$ et $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ étant continues et positives sur $[c, +\infty[$ pour tout $c > 0$, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives on en déduit que pour tout $c > 0$ les intégrales $\displaystyle\int_c^{+\infty} |x^2 f(x)|dx$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{2}{x}dx$ sont de même nature. Ainsi, pour tout $c > 0$ $\displaystyle\int_c^{+\infty} |x^2 f(x)|dx$ diverge. Finalement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |x^2 f(x)|dx$ diverge et X ne possède donc pas de variance.

Correction de l'exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

1. La fonction f est continue. Pour tout $A < B$ on a :

$$\int_A^B f(x)dx = \left[\frac{\arctan(x)}{\pi}\right]_A^B = \frac{\arctan(B) - \arctan(A)}{\pi}.$$

   Comme $\arctan(x)$ a pour limite $\pm\dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers $\pm\infty$, on en déduit que l'intégrale doublement généralisé $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 1.$$

   Ainsi f est une densité de probabilité.

2. D'après ce qui précède :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

   La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge absolument.
   Or :

$$|xf(x)| \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{1}{\pi|x|}$$

   et pour tout $c > 0$, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-c} \frac{1}{-x}dx$ divergent. On en déduit, par le théorème de d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|dx$ diverge.
   Ainsi, X ne possède pas d'espérance.

3. Soit U de loi uniforme sur $]0, 1[$.
   (a) La fonction F_X est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, F_X réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$ (F_X est une fonction de répartition donc la limite en $-\infty$ est 0 et en $+\infty$ est 1).

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$ on a :

$$F_X(x) = y \iff \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2} = y \iff \arctan(x) = \pi\left(y - \frac{1}{2}\right)$$
$$\iff x = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right)$$

car $\pi\left(y - \frac{1}{2}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi :

$$\forall y \in]0,1[, \quad F_X^{-1}(y) = \tan\left(\pi\left(y - \frac{1}{2}\right)\right).$$

(b) On note $Y = F_X^{-1}(U)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x))$$

car F_X est strictement croissante et bijection réciproque de F_X^{-1}.
Comme U suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et que $F_X(x) \in]0,1[$ alors :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_X(x).$$

Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que Y suit la même loi que X.

(c) La fonction `rd.rand` du module `numpy.random` (importé sous le label `rd`) simule une loi uniforme sur $]0,1[$. D'après la question précédente :

```
def simuleX():
        return np.tan(np.pi*(rd.rand()-0.5))
```

simule la variable aléatoire X.

Correction de l'exercice 6.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   — Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $f(x) = \cos(x) \geq 0$.
   — Sinon, $f(x) = 0$.

   Ainsi f est positive.

   De plus f étant nulle en dehors de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ converge et :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

   Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \cos(t)dt & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On remarque que $X \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ presque sûrement.

4. Enfin, f étant nulle en dehors de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$ converge absolument donc X possède une espérance et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos(x)dx$$

En effectuant une intégration par parties ($x \mapsto x$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$) on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx &= [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \\ &= \frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7.

1. On rappelle que la fonction de répartition F_X de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   (a) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}F_Y(y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \mathbb{P}(X \leq y^2) & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

   La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc continue) sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\lim_{y \to 0^-} F_Y(y) = \lim_{y \to 0^+} F_Y(y) = F_Y(0) = 0$$

   donc F_Y est aussi continue en 0.
   Finalement, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$ donc Y est à densité.
   Pour tout $y \neq 0$ on a :

$$F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

   donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

   est une densité de Y.
   La variable aléatoire Y possède une densité nulle en dehors de $[0, +\infty[$, elle possède donc une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf_Y(x)dx$ converge absolument.

Soit $A > 0$. Par intégration par parties :

$$\int_0^A |xf_Y(x)|dx = \int_0^A x \times 2\lambda x e^{-\lambda x^2} dx = [-xe^{-\lambda x^2}]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x^2} dx$$
$$= Ae^{-\lambda A^2} + \int_0^A e^{-\lambda x^2} dx.$$

En effectuant le changement de variable $y = \sqrt{\lambda} x$ on trouve :

$$\int_0^A |xf_Y(x)|dx = Ae^{-\lambda A^2} + \int_0^A e^{\lambda x^2} dx$$
$$= Ae^{-\lambda A^2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda} A} e^{-y^2} dy$$

Or on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (penser à une densité d'une loi $\mathcal{N}\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$). Finalement :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A |xf_Y(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi Y possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} xf_Y(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^3 \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt[3]{y}) \qquad = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \sqrt[3]{y}} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}.$$

La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc continue) sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\lim_{y \to 0^-} F_Y(y) = \lim_{y \to 0^+} F_Y(y) = F_Y(0) = 0$$

donc F_Y est aussi continue en 0.
Finalement, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$ donc Y est à densité.
Pour tout $y \neq 0$ on a :

$$F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \dfrac{1}{3}\lambda y^{-\frac{2}{3}} e^{-\lambda \sqrt[3]{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \geq 0 \\ \dfrac{1}{3}\lambda y^{-\frac{2}{3}} e^{-\lambda \sqrt[3]{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

est une densité de Y.

La variable aléatoire X possède une densité nulle en dehors de $[0,+\infty[$ et la fonction cube est continue sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de transfert, la variable X^3 possède donc une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x^3 e^{-\lambda x} dx$ converge absolument.
La fonction $x \mapsto \lambda x^3 e^{-\lambda x}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$ et il suffit de montrer la convergence.
Soit $A > 0$. Par intégration par parties :

$$\int_0^A \lambda x^3 e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{x^3 e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^A + \frac{3}{\lambda}\int_0^A x^2 e^{-\lambda x} dx.$$

Comme X possède un moment d'ordre 2, on en déduit :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \lambda x^3 e^{-\lambda x} dx = \frac{3}{\lambda}\mathbb{E}(X^2).$$

Ainsi X^3 possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(X^3) = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{\lambda}(\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \frac{6}{\lambda^3}.$$

(c) Notons F_Y la fonction de répartition de Y et soit $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) &= \begin{cases} \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{X} \le y\right]\right) & \text{si } y \le 0 \\ \mathbb{P}([Y \le y] \cap [X \ne 0]) + \mathbb{P}([Y \le y] \cap [X = 0]) & \text{si } y > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{y} \le X < 0\right]\right) & \text{si } y < 0 \\ \mathbb{P}(X \le 0) & \text{si } x = 0 \\ \mathbb{P}([Y \le y] \cap [X \ne 0]) & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad \text{car } \mathbb{P}(X = 0) = 0 \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 0 \\ \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{X} \le y\right] \cap [X \ne 0]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 0 \\ \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{y} \le X\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 0 \\ 1 - \mathbb{P}\left(\left[X < \frac{1}{y}\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 0 \\ 1 - \mathbb{P}\left(\left[X \le \frac{1}{y}\right]\right) & \text{si } y > 0 \end{cases} \quad \text{car } X \text{ est à densité} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \le 0 \\ e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

La fonction F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc a fortiori continue sur $\mathbb{R}^*$.
Étudions la continuité en 0. Par limite usuelle, on a :

$$\lim_{y\to 0^+} F_Y(y) = 0 = F_Y(0) = \lim_{y\to 0^-} F_Y(y).$$

Ainsi F_Y est continue en 0 et finalement F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc que Y est à densité. De plus, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^*$:

$$F'_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \dfrac{\lambda}{y^2} e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

Ainsi la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \in \mathbb{R}, \quad f(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \dfrac{\lambda}{y^2} e^{-\frac{\lambda}{y}} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

est une densité de Y.

2. (a) On remarque que comme X est à valeurs dans $[0,1]$ alors $Y = X^2$ est aussi à valeurs dans $[0,1]$. Soit $y \in \mathbb{R}$.
   — Comme Y est presque sûrement à valeurs dans $[0,1]$, on a

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}.$$

   — Pour $y \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(X^2 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) \quad (\text{car } X \text{ est p.s. } \geq 0) \\ &= \sqrt{y} \quad (\text{f.r. d'une v.a. de loi uniforme sur } [0,1], \text{ car } 0 \leq y \leq 1) \end{aligned}$$

On a donc, en notant F_Y la fonction de répartition de Y, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

La fonction F_Y est une fonction de répartition, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $[0,1]$, $]1, +\infty[$ et est de plus continue sur $\mathbb{R}$ (observer limite à droite et à gauche aux points 0 et 1). La variable Y est donc une v.a à densité dont une densité est donnée par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} F'_Y(y) & \text{si } y \neq 0 \text{ et } y \neq 1 \\ 0 & \text{si } y = 0 \text{ ou } y = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

L'espérance de Y est donc donnée par la formule de transfert pour X :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

car l'intégrale est bien absolument convergente (ce n'est pas une intégrale généralisée).

(b) On remarque que Y est à valeurs dans $[0, +\infty[$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

— Comme Y est presque sûrement à valeurs dans $[0, +\infty[$, on a

$$\forall y < 0, \quad \mathbb{P}(Y \leq y) = 0.$$

— Pour $y \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(X^2 \leq y) \\ &= \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

On a donc, en notant F_Y la fonction de répartition de Y, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & \text{si } 0 \leq y \end{cases}$$

Noter qu'on ne connait pas de formule pour F_X en termes de fonctions élémentaires. Cependant, on sait que

i. F_X de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
ii. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Par les arguments usuels de composition, on obtient que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (observer le bon recollement en 0) et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
La fonction F_Y est une fonction de répartition, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et est de plus continue sur $\mathbb{R}$. La variable Y est donc une v.a à densité dont une densité est donnée par

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} F'_Y(y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}(F'_X(\sqrt{y}) + F'_X(-\sqrt{y})) & \text{si } 0 < y \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} & \text{si } 0 < y \end{cases} \end{aligned}$$

L'espérance de Y est donc donnée, en cas de CVA de l'intégrale en jeu, par la formule

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} y . \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \, dy = \int_0^{+\infty} \sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \, dy$$

On peut effectuer ce calcul en effectuant le changement de variable $x = \sqrt{y}$ mais on peut aussi accélérer ce calcul en utilisant directement nos connaissances sur les variables gaussiennes :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1.$$

Correction de l'exercice 8.

1. On remarque dans un premier temps que E est à valeurs dans $[0,+\infty[$.
   Soit $y \in \mathbb{R}$.
   — si $y \leq 0$ alors $\mathbb{P}(E \leq y) = 0$.
   — si $y > 0$ alors :
   $$\mathbb{P}(E \leq y) = \mathbb{P}(-\ln(U) \leq y) = \mathbb{P}(U \geq e^{-y}) = 1 - e^{-y}$$
   car $e^{-y} \in [0,1]$.
   Finalement :
   $$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_E(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{sinon} \end{cases}$$
   On reconnaît une loi exponentielle de paramètre 1.
2. Notons $Y = -X$. Soit $x \in \mathbb{R}$:
   $$F_Y(x) = \mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq -x) = \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt.$$
   En effectuant le changement de variable $u = -t$ dans cette intégrale (qui est bien convergente), on obtient :
   $$F_Y(x) = \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = -\int_{x}^{-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-u)^2}{2\sigma^2}} du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du.$$
   On reconnaît alors que $-X$ suit la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
3. Notons $Y = -X$. Soit $x \in \mathbb{R}$:
   $$F_Y(x) = \mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq -x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \displaystyle\int_{-x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
   On remarque que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Donc $-X$ est une variable à densité dont une densité est donnée par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 9.

1. (a) C'est immédiat car la fonction partie entière est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, par définition de la partie entière et compte tenu que k et $k-1$ sont positifs on a :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k-1) = \mathbb{P}(k-1 \leq X < k) &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= 1 - e^{-\lambda k} - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}.\end{aligned}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$\mathbb{P}(Y+1=k) = P(Y=k-1) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda}) = (e^{-\lambda})^{k-1}(1-e^{-\lambda}).$$

Ainsi $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$.

(d) Puisque la variable aléatoire $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$, elle possède une espérance et une variance :

$$\mathbb{E}(Y+1) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} \quad ; \quad \mathbb{V}(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}.$$

On en déduit que Y possède une espérance et une variance :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y)-1 = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \frac{1}{e^{\lambda}-1} \quad ; \quad \mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y+1) = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}.$$

2. (a) La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est à valeurs dans $[0,1[$ donc $Z = X - \lfloor X \rfloor$ est à valeurs dans $[0,1[$.

(b) Soit $x \in [0,1[$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Y=k])_{k\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned}
P(Z \le x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([Z \le x] \cap [Y=k]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X-k \le x] \cap [k \le X < k+1]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X \le x+k] \cap [k \le X < k+1]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \le X \le x+k]) \quad \text{car } x \in [0,1[\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} F_X(x+k) - F_X(k) \quad \text{car } X \text{ à densité} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+x)}) \\
&= (1-e^{-\lambda x}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} \\
&= \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}.
\end{aligned}$$

(c) En particulier, on déduit des questions précédentes que la fonction de répartition F_Z de Z est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}.$$

La fonction F_Z est de classe C^1 (a fortiori continue) sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. On vérifie facilement qu'elle est continue en 0 et en 1.

Ainsi Z est bien à densité. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ on a :

$$F_Z'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est une densité de Z.

(d) Comme X et Y possèdent une espérance alors par linéarité Z aussi et on a :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda}-1}.$$

Correction de l'exercice 10.

1. La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ (fonction constante) et sur $]0, +\infty[$ (produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$). On a

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0 = g(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x).$$

Ainsi g est continue en 0. En revanche

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0.$$

Donc g n'est pas dérivable en 0.

2. (a) La fonction g est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus, si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(1)$, on remarque que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \mathbb{E}(X) = 1.$$

Donc g est une densité de probabilité.

(b) La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$:

$$G(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = 0$$

car $g(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

- Si $x \geq 0$:
$$G(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \int_{0}^{x} te^{-t}dt.$$
En faisant une intégration par parties, on trouve :
$$G(x) = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}(1+x).$$

Ainsi
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{array} \right.$$

(d) La fonction g étant nulle en dehors de $[0, +\infty[$ la variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} tg(t)dt$ convergence absolument. Soit $A > 0$. Par intégration par parties, on a :
$$\int_0^A |tg(t)|dt = \int_0^A t^2e^{-t}dt = [-t^2e^{-t}]_0^A - \int_0^A 2t\times(-e^{-t})dt = -A^2e^{-A} + 2\int_0^A g(t)dt.$$
Or on sait que :
$$\lim_{A\to+\infty} -A^2e^{-A} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{A\to+\infty} \int_0^A g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1.$$
Donc :
$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A |tg(t)|dt = 2.$$
Ainsi, Y possède une espérance et comme $t \mapsto tg(t)$ est positive on a :
$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} tg(t)dt = \int_0^{+\infty} |tg(t)|dt = 2.$$

3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction exponentielle réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :
$$[Z \leq t] = [e^Y \leq t] = \left\{ \begin{array}{ll} [Y \leq \ln(t)] & \text{si } t > 0 \\ \emptyset & \text{si } t \leq 0 \end{array} \right. .$$
On obtient alors :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(t) = \left\{ \begin{array}{ll} G(\ln(t)) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{t}(1 + \ln(t)) & \text{si } t \geq 1 \end{array} \right. .$$

(b) La fonction H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc a fortiori continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Étudions la continuité en 1. Par opérations sur les limites on a :
$$\lim_{t\to1^+} H(t) = 0 = H(1) = \lim_{t\to1^-} H(t).$$
Ainsi H est continue en 1 et finalement sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, Z est à densité. De plus, pour tout $t \neq 1$ on a :
$$H'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } t < 1 \\ \\ \dfrac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \leq 1 \end{array} \right. .$$

Au final, la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{\ln(t)}{t^2} & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$$

est une densité de Z.

Correction de l'exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. On a :
$$\forall x \in [0, n[, \; 1 - \frac{x}{n} \geq 0$$
et donc il est clair que la fonction f_n, manifestement continue sur $\mathbb{R}$ à l'exception, peut-être des points 0 et n, est positive sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, si et seulement si $c_n > 0$.
On a par ailleurs, en effectuent le changement de variable affine
$$y = 1 - \frac{x}{n}, \quad , dy = -\frac{1}{n}.dx, \quad , \begin{cases} y \to 0 & \text{si } x \to n \\ y \to 1 & \text{si } x \to 0 \end{cases}$$
que
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ dx &= \int_0^n c_n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ dx \\ &= c_n n \int_0^1 y^n \ dy \\ &= c_n \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$
Pour $c_n > 0$, de ce qui a été dit auparavant, f_n soit une densité de probabilité si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ dx = 1$, c'est-à-dire
$$c_n = \frac{n+1}{n}.$$

2. Soit X_n une variable aléatoire ayant pour densité f_n.
Soit $k \in \mathbb{N}$, du fait du caractère classique de l'intégrale écrite à la première ligne, le moment d'ordre k de X_n existe et, avec le changement de variables linéaire,
$$y = \frac{x}{n}, \quad , dy = \frac{1}{n}dx, \quad , \begin{cases} y \to 0 & \text{si } x \to 0 \\ y \to 1 & \text{si } x \to n \end{cases},$$

on obtient,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_n(x)\ dx = \frac{n+1}{n}\int_0^n x^k \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ dx \\ &= (n+1)\int_0^1 n^k y^k (1-y)^n\ dy \\ &= n^k(n+1)\int_0^1 y^k(1-y)^n\ dy\end{aligned}$$

On reconnait dans cette dernière intégrale le sujet de nombre d'exercices sur les intégrations par parties et les formules de récurrence et on obtient le résultat attendu en faisant cet exercice de calcul. On obtient, tous calculs repris,

$$\mathbb{E}(X_n^k) = n^k(n+1)\int_0^1 y^k(1-y)^n\ dy = \frac{n^k}{\binom{n+k+1}{k}}$$

3. La v.a X_n est à valeurs dans $[0, n[$, sa fonction de répartition, F_n est donc
   - nulle sur $]-\infty, 0[$,
   - 1 sur $[n, +\infty[$,

   Pour $x \in [0, n[$, on a (avec le même changement de variable affine que dans la première question)

   $$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \frac{n+1}{n}\int_0^x (1-\frac{t}{n})^n\ dt = (n+1)\int_{1-\frac{x}{n}}^1 y^n\ dy = 1-(1-\frac{x}{n})^{n+1}$$

   En résumé, on a

   $$F_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > n \\ 1-(1-\frac{x}{n})^{n+1} & \text{si } n > x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Pour $x < 0$,

     $$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n(x) = 0$$

     et donc

     $$F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   - Pour $x > 0$,

     $$\forall n \in \mathbb{N},\ n > x \Rightarrow F_n(x) = 1-(1-\frac{x}{n})^{n+1}$$

     et donc (après passage au ln, développement limité de $\ln(1-\frac{x}{n}) = -\frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$),

     $$F_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$$

   La limite $F(x)$ de $F_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$ est

   $$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

5. On reconnait en F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{E}(1)$, à densité donc.

Correction de l'exercice 12.

1. Notons $Y = \max(X_1, X_2)$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) = P(Y \leq t) &= P([X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t]) \\ &= P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \quad \text{par indépendance} \\ &= F_{X_1}(t)F_{X_2}(t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Notons $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) = 1 - P(Y > t) &= 1 - P([X_1 > t] \cap \dots \cap [X_n > t]) \\ &= 1 - P(X_1 > t) \times \dots \times P(X_n > t) \quad \text{par indépendance mutuelle} \\ &= 1 - P(X_1 > t)^n \quad \text{car elles suivent toutes la même loi que } X_1 \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(t))^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi Y suit la loi $\mathcal{E}(n\lambda)$.

Correction de l'exercice 13. Une densité de X est donnée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

et une densité de Y est donnée par la formule

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

Comme X et Y sont indépendantes, une densité de $Z = X + Y$ est donc donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx$$

On a, pour $z \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_X(x)f_Y(z-x) &= \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda e^{-\lambda(z-x)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x) \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x). \end{aligned}$$

Il est alors clair que si $z < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_X(x)f_Y(z-x) = 0$ et donc $f_Z(z) = 0$.
Si $z \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(z-x)\, dx &= \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda . z}\, dx \\ &= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \end{aligned}$$

et en résumé, une densité f_Z de Z est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z).$$

Correction de l'exercice 14. La formule de convolution, donne que $X+Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{X+Y} est calculable par la formule :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ f_{X+Y}(s) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+(s-x)^2}\, dx.$$

Calculons cette intégrale généralisée en utilisant la décomposition proposée (et dont la vérification est laissée à la sagacité des lecteurs et lectrices).
Attention, les intégrales qui vont apparaître *via* cette décomposition sont divergentes ! Il est donc impératif de raisonner avec des bornes finies puis de passer à la limite !
Soit A, B deux nombres destinés à tendre vers $+\infty$ et $-\infty$.
On a, pour $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$,

$$\begin{aligned}\int_B^A \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+(s-x)^2}\, dx &= \frac{1}{s(s^2+4)} \int_B^A \frac{2x+s}{1+x^2}\, dx + \frac{1}{s(s^2+4)} \int_B^A \frac{2(s-x)+s}{1+(s-x)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{(s^2+4)} \left(\int_B^A \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_B^A \frac{1}{1+(s-x)^2}\, dx \right) + \\ &\quad \frac{1}{s(s^2+4)} \left(\int_B^A \frac{2x}{1+x^2}\, dx + \int_B^A \frac{2(s-x)}{1+(s-x)^2}\, dx \right)\end{aligned}$$

Dans cette somme, la limite lorsque $A, B \to \pm\infty$ du premier terme est $\frac{1}{(s^2+4)}.2\pi$ (on reconnait une primitive en arctan).
Intéressons nous au deuxième terme (on oublie le terme $\frac{1}{s.(s^2+4)}$ en facteur) que l'on note $R(B, A)$. On a

$$\begin{aligned}R(B,A) &= \left(\int_B^A \frac{2x}{1+x^2}\, dx + \int_B^A \frac{2(s-x)}{1+(s-x)^2}\, dx \right) \\ &= \left(\int_B^A \frac{2x}{1+x^2}\, dx - \int_{s-B}^{s-A} \frac{2x}{1+x^2}\, dx \right) \\ &= \left[\ln(1+x^2)\right]_B^A - \left[\ln(1+x^2)\right]_{s-B}^{s-A} \\ &= \ln \frac{1+A^2}{1+(s-A)^2} - \ln \frac{1+B^2}{1+(s-B)^2}\end{aligned}$$

et, lorsque $A, B \to \pm\infty$, on a donc $R(B, A) \to 0$.
En reprenant notre calcul, on vient donc d'obtenir après ce passage à la limite que

$$\forall s \in \mathbb{R}, s \neq 0, \quad f_{X+Y}(s) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(s^2+4)}.$$

Un changement de variable linéaire, basé sur le fait que $Z = \frac{X+Y}{2}$ montre que Z est à densité et que f est une densité de Z.

Correction de l'exercice 15.

— **Initialisation :** pour $n = 2$. On rappelle que pour tout i, une densité de X_i est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Par indépendance, une densité de S_2 est donc donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_2(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)f(z-x)\ dx$$

On a, pour $z \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)f(z-x) &= e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-(z-x)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x) \\ &= e^{-z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x). \end{aligned}$$

Il est alors clair que si $z < 0$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f(z-x) = 0$ et donc $f_2(z) = 0$.
Si $z \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)f(z-x)\ dx &= \int_0^z e^{-z}\ dx \\ &= ze^{-z} \end{aligned}$$

et en résumé, une densité f_2 de S_2 est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_2(z) = ze^{-z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z).$$

— **Hérédité :** soit $n \geq 2$. On suppose que S_n est à densité et que f_n est une densité de S_n.
Par lemme des coalitions, S_n et X_{n+1} sont indépendantes donc $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est à densité.
Par indépendance, une densité de S_{n+1} est donc donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)f(z-x)\ dx.$$

On a, pour $z \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_n(x)f(z-x) &= \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-(z-x)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-z}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x). \end{aligned}$$

Il est alors clair que si $z < 0$, $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x)f(z-x) = 0$ et donc $f_{n+1}(z) = 0$.
Si $z \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)f(z-x)\ dx &= \int_0^z \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-z}dx \\ &= \frac{e^{-z}}{(n-1)!}\left[\frac{x^n}{n}\right]_0^z \\ &= \frac{z^n e^{-z}}{n!} \end{aligned}$$

et en résumé, f_{n+1} est une densité de S_{n+1}.

— **Conclusion :** par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par linéarité de l'espérance, comme $X_1, \dots, X_n$ ont une espérance alors S_n possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = n.$$

De même, les $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et possèdent une variance. Donc S_n possède une variance :

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n.$$

Correction de l'exercice 16. Comme X et Y sont indépendantes, une densité de S est donc donnée par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_S(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\ dx$$

1. Dans ce cas, on a pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$f_X(x) f_Y(z-x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(z-x).$$

On en déduit que si $z < -2$ ou $z > 2$ alors $f_X(x)f_Y(z-x)$ est nul pour tout réel x et donc $f_S(z) = 0$.
Soit $z \in [-2, 2]$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(z-x) \neq 0 &\iff -1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq z-x \leq 1\\
&\iff -1 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad z-1 \leq x \leq z+1\\
&\iff \max(z-1, -1) \leq x \leq \min(z+1, 1).
\end{aligned}$$

— Si $z \in [-2, 0]$ alors $\max(z-1,-1) = -1$ et $\min(z+1,1) = z+1$ d'où :

$$f_S(z) = \int_{-1}^{z+1} \frac{1}{4} dx = \frac{z+2}{4}$$

— Si $z \in [0, 2]$ alors $\max(z-1,-1) = z-1$ et $\min(z+1,1) = 1$ d'où :

$$f_S(z) = \int_{z-1}^{1} \frac{1}{4} dx = \frac{2-z}{4}$$

Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_S(z) = \frac{z+2}{4}\mathbf{1}_{[-2,0]}(z) + \frac{2-z}{4}\mathbf{1}_{[2,2]}(z).$$

2. Dans un premier temps, on détermine une densité de Y. Pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-Y \geq -y) = \int_{-y}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) dx &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx & \text{si } y \geq 0 \\ \displaystyle\int_{-y}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx & \text{sinon} \end{cases}\\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 0 \\ e^{\lambda y} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

puis
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \lambda e^{\lambda y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(y).$$

Dans ce cas, on a pour tout $z \in \mathbb{R}$:
$$f_X(x) f_Y(z-x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda e^{\lambda(z-x)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(z-x) = \lambda^2 e^{\lambda z} e^{-2\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(z-x).$$

Soit $z \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x) \neq 0 &\iff x \geq 0 \quad \text{et} \quad z - x \leq 0 \\ &\iff \max(z, 0) \leq x. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}$:
$$f_S(z) = \int_{\max(0,z)}^{+\infty} \lambda^2 e^{\lambda z} e^{-2\lambda x} dx = \lambda^2 e^{\lambda z} \left[-\frac{e^{-2\lambda x}}{2\lambda} \right]_{\max(0,z)}^{+\infty} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(2\max(0,z) - z)} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |z|}.$$

3. Dans ce cas, on a pour tout $z \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f_X(x) f_Y(z-x) &= \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{(q-1)!} (z-x)^{q-1} e^{-(z-x)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x) \\ &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} x^{p-1} (z-x)^{q-1} e^{-z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x) \end{aligned}$$

On en déduit que si $z < 0$ alors $f_X(x) f_Y(z-x)$ est nul pour tout réel x et donc $f_S(z) = 0$.
Pour $z \geq 0$, on a :
$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z-x) \neq 0 &\iff x \geq 0 \quad \text{et} \quad z - x \geq 0 \\ &\iff 0 \leq x \leq z. \end{aligned}$$

Ainsi :
$$f_S(z) = \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} e^{-z} \int_0^z x^{p-1} (z-x)^{q-1} dx$$

et en factorisant par z et effectuant le changement de variable $t = \dfrac{x}{z}$ on a :
$$\begin{aligned} f_S(z) &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} e^{-z} z^{q-1} \int_0^z x^{p-1} (1 - \frac{x}{z})^{q-1} dx \\ &= \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} e^{-z} z^{p+q-1} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \end{aligned}$$

En effectuant des intégrations par parties successives, on obtient :
$$f_S(z) = \frac{1}{(p-1)!(q-1)!} e^{-z} z^{p+q-1} \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{1}{(p+q-1)!} e^{-z} z^{p+q-1}.$$

Finalement, on obtient :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad f_S(z) = \frac{1}{(p+q-1)!} e^{-z} z^{p+q-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z).$$

On peut, plus rapidement, utiliser l'exercice précédent en remarquant que X est la loi de la somme de p variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$ et Y est la loi de la somme de q variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. Alors, S est la loi d'une somme de $p+q$ variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.

Correction de l'exercice 17.

1. Soit $A > 0$. Comme f est continue par hypothèse, alors F_X, primitive de f, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^A t f(t) dt &= [t F_X(t)]_0^A - \int_0^A F_X(t) dt \\
&= A F_X(A) - \int_0^A \mathbb{P}(X \leq t) dt \\
&= A F_X(A) - \int_0^A (1 - \mathbb{P}(X > t)) dt \\
&= A F_X(A) - A + \int_0^A \mathbb{P}(X > t) dt.
\end{aligned}$$

2. Comme f est positive, elle possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente (le « absolument » est superflu car l'intégrande est positif).

   — Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$ converge. Alors pour tout $A > 0$:

   $$\int_0^A t f(t) dt = \int_0^A \mathbb{P}(X > t) dt + A(F_X(A) - 1) \leq \int_0^A \mathbb{P}(X > t) dt \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$$

   où on a utilisé le fait que $F_X(A) \leq 1$.
   La fonction $A \mapsto \displaystyle\int_0^A t f(t) dt$ est donc croissante (intégrande positif) et majorée donc possède une limite finie en $+\infty$. Cela signifie exactement $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge (absolument) donc que X possède une espérance.
   On remarque aussi qu'alors :

   $$\mathbb{E}(X) \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt.$$

— Supposons que X possède une espérance. Alors pour tout $A > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^A \mathbb{P}(X > t)dt = \int_0^A tf(t)dt + A(1 - F_X(A)) &= \int_0^A tf(t)dt + A\mathbb{P}(X > A)\\ &= \int_0^A tf(t)dt + A\int_A^{+\infty} f(t)dt\\ &\leq \int_0^A tf(t)dt + \int_A^{+\infty} tf(t)dt\\ &\leq \int_0^{+\infty} tf(t)dt\\ &\leq \mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

La fonction $A \mapsto \int_0^A \mathbb{P}(X > t)dt$ est donc croissante (intégrande positif) et majorée donc possède une limite finie en $+\infty$. Cela signifie exactement que $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt \leq \mathbb{E}(X).$$

— Conclusion : X possède une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} P(X > t)dt$ converge et on a

$$\mathbb{E}(X) \leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt \leq \mathbb{E}(X).$$