Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025-2026

Mathématiques – TD10

Applications linéaires

1 Applications linéaires, noyau, image

Correction de l'exercice 1.

1. Notons f_1 cette application. Elle n'est pas linéaire car :
$$f_1(2 \cdot 1) = 8 \neq 2 \cdot f_1(1) = 4.$$
2. Notons f_2 cette application. Elle n'est pas linéaire car $f_2(0) \neq 0$.
3. Notons f_3 cette application. Soit $(x,y),(x',y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.
On a :
$$\begin{aligned} f_3((x,y)+\lambda(x',y')) &= f_3(x+\lambda x', y+\lambda y') \\ &= (y+\lambda y', x+\lambda x') \\ &= (y,x)+\lambda(y',x') \\ &= f_3((x,y))+\lambda f_3((x',y')). \end{aligned}$$
Ainsi f_3 est linéaire.
Déterminons son noyau. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; on a :
$$(x,y) \in \ker(f_3) \iff f_3((x,y)) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0).$$
Donc $\ker(f_3) = \{(0,0)\}$ (f_3 est donc injective).
De plus :
$$\operatorname{Im}(f_3) = \{(y,x)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$
(donc f_3 est surjective).
4. Notons φ cette application. Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors $\varphi(f+\lambda g)$ est définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f+\lambda g)(t) = \frac{f(t)+\lambda g(t)}{1+t^2} = \frac{f(t)}{1+t^2} + \lambda \frac{g(t)}{1+t^2} = \varphi(f)(t) + \lambda\varphi(g)(t).$$
Ainsi : $\varphi(f+\lambda g) = \varphi(f)+\lambda\varphi(g)$. Donc φ est linéaire.
Déterminons son noyau : soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On a :
$$f \in \ker(\varphi) = \varphi(f) = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(t)}{1+t^2} = 0 \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = 0.$$
Ainsi $\ker(\varphi) = \{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$ (φ est donc injective).
Déterminons son image. Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
$$g \in \operatorname{Im}(\varphi) \iff \exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(t)}{1+t^2} = g(t).$$
Or, en notant $f : t \mapsto (1+t^2)g(t)$ on a bien :
$$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \varphi(f) = g.$$
Ainsi : $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (φ est donc surjective).

5. Notons f_5 cette application. Soit $(x, y), (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.
   On a :
$$\begin{aligned} f_5((x,y)+\lambda(x',y')) &= f_5(x+\lambda x', y+\lambda y') \\ &= 3(x+\lambda x')+5(y+\lambda y') \\ &= 3x+5x'+\lambda(3x'+5y') \\ &= f_5((x,y))+\lambda f_5((x',y')). \end{aligned}$$
   Ainsi f_3 est linéaire.
   Déterminons son noyau. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on a :
$$(x,y) \in \ker(f_5) \iff f_5((x,y)) = (0,0) \iff 3x+5y=0 \iff x = -\frac{5}{3}y.$$
   Donc $\ker(f_5) = \mathrm{Vect}((-\frac{5}{3}, 1))$.
   De plus :
$$\mathrm{Im}(f_5) = \{3x+5y\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}.$$
   (donc f_5 est surjective).
6. Notons f_6 cette application. Soit $(x, y), (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire.
   On a :
$$\begin{aligned} f_6((x,y)+\lambda(x',y')) &= f_3(x+\lambda x', y+\lambda y') \\ &= (-x-\lambda x', y+\lambda y') \\ &= (-x,y)+\lambda(-x',y') \\ &= f_6((x,y))+\lambda f_6((x',y')). \end{aligned}$$
   Ainsi f_6 est linéaire.
   Déterminons son noyau. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on a :
$$(x,y) \in \ker(f_6) \iff f_6((x,y)) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0).$$
   Donc $\ker(f_6) = \{(0,0)\}$ (f_6 est donc injective).
   De plus :
$$\mathrm{Im}(f_6) = \{(-x,y)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$
   (donc f_3 est surjective).
7. Notons f_6 cette application. Elle n'est pas linéaire car :
$$f_6((1,0)+(0,1)) = 1 \neq f_6((1,0)) + f_6((0,1)) = 0.$$

Correction de l'exercice 2.

1. (a) Montrons que h est linéaire. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} h(P+\lambda Q) &= X(P+\lambda Q)(X+1) - (X+1)(P+\lambda Q)(X) \\ &= XP(X+1)-(X+1)P(X)+\lambda\,(XQ(X+1)-(X+1)Q(X)) \\ &= h(P)+\lambda h(Q). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad h(P+\lambda Q) = h(P) + \lambda h(Q).$$

L'application h est donc linéaire.

(b) Noyau de h. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(h) &\iff h(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\iff X(a(X+1)^2 + b(X+1) + c) - (X+1)(aX^2 + bX + c) = 0 \\ &\iff aX^2 + aX + c = 0 \\ &\iff a = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\ker(h) = \mathrm{Vect}(X).$$

La famille (X) est donc une base de $\ker(h)$.

(c) Déterminons l'image de h. Soit $(1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(h) &= \mathrm{Vect}(h(1), h(X), h(X^2)) \\ &= \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2 + X) \\ &= \mathrm{Vect}(1, X^2 + X). \end{aligned}$$

La famille $\left(1, X^2 + X\right)$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(h)$. De plus elle est échelonnée et formée de polynômes non nuls donc elle est libre. Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Im}(h)$.

2. (a) Montrons que ψ est linéaire. Soient $(X,Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \psi(X + \lambda Y) &= A(X + \lambda Y) - (X + \lambda Y)B \\ &= AX + \lambda AY - XB - \lambda YB \\ &= AX - XB + \lambda(AY - YB) \\ &= \psi(X) + \lambda \psi(Y). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \psi(X + \lambda Y) = \psi(X) + \lambda \psi(Y).$$

L'application ψ est donc linéaire.

(b) Noyau de ψ. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X \in \ker(\psi) \iff \psi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff AX = XB \\ &\iff \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(\psi) = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$. L'application h est injective.

(c) Image de ψ.

— **Méthode 1 :** on sait que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\psi) &= \mathrm{Vect}\left(\psi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right), \psi\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right), \psi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right), \psi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\psi)$ et on vérifie qu'elle est bien libre. Il s'agit donc d'une base de $\mathrm{Im}(\psi)$.
Or $\mathrm{Im}(\psi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4 = \dim(\mathrm{Im}(\psi)).$$

Donc $\mathrm{Im}(\psi) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— **Méthode 1 :** d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(\psi)) + 0 = \dim(\mathrm{Im}(\psi)) + \dim(\ker(\psi)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})).$$

Donc $\mathrm{Im}(\psi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4 = \dim(\mathrm{Im}(\psi)).$$

Ainsi $\mathrm{Im}(\psi) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En particulier ψ est surjectif.
Finalement ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 3. Tout d'abord l'application u est bien définie. En effet, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$ alors, sa dérivée existe.

1. Montrons que u est linéaire. Soient $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction $u(\lambda f + \mu g)$ est définie par :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)'(x) - \cos(x)(\lambda f + \mu g)(x)\\ &= \lambda f'(x) + \mu g'(x) - \cos(x)(\lambda f(x) + \mu g(x))\\ &= \lambda f'(x) - \cos(x)\lambda f(x) + \mu g'(x) - \cos(x)\mu g(x)\\ &= \lambda\left(f'(x) - \cos(x)f(x)\right) + \mu\left(g'(x) - \cos(x)g(x)\right)\\ &= \lambda u(f)(x) + \mu u(g)(x).\end{aligned}$$

Ainsi on a bien :

$$u(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu u(g).$$

Donc u est linéaire.
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ alors, sa dérivée f' existe et est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Comme il en est de même pour la fonction cos, par les théorèmes de stabilité par opérations algébriques (somme, produit) de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction $x \mapsto f'(x) - \cos(x)f(x)$ est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, c'est-à-dire un élément de E.

2. On a
$$\ker(u) = \{f \in E,\, u(f) = 0\}.$$
Une fonction f est dans le noyau de u si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\, f'(x) - \cos(x)f(x) = 0.$$
Le noyau de u est donc l'ensemble des fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
On a donc (en utilisant la technique de résolution standard de telles équations)
$$\ker(u) = \{f \in E,\, \exists\lambda \in \mathbb{R},\, \forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = \lambda.e^{\sin x}\} = \mathrm{Vect}(f_1)$$
où l'on a posé $f_1 : x \mapsto e^{\sin x}$.
3. Pour montrer que $u : E \to E$ est surjective, il suffit de montrer que pour toute $g \in E$, il existe $f \in E$ telle que
$$u(f) = g$$
c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R},\, f'(x) - \cos(x)f(x) = g(x) \qquad (E_g)$$
Soit $g \in E$. Il s'agit de montrer que cette équation différentielle linéaire du premier ordre (non homogène si g n'est pas la fonction nulle) admet au moins une solution f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Il s'agit de mettre en œuvre la méthode de la variation de la constante et de vérifier que la solution obtenue est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
À une fonction f, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on associe la fonction λ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\, \lambda(x) = \frac{f(x)}{f_1(x)}$$
Cette fonction λ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car f et f_1 le sont et f_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On a
$$f = \lambda f_1 \quad \text{et} \quad f' = \lambda' f_1 + \lambda f_1'.$$
La fonction f est solution de E_g si et seulement si
$$\forall x \in \mathbb{R},\, f'(x) - \cos(x)f(x) = g(x)$$
c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R},\, \lambda'(x)f_1(x) = g(x)$$
ou encore
$$\forall x \in \mathbb{R},\, \lambda'(x) = \frac{g(x)}{f_1(x)}.$$
La résolution de l'équation (E_g) est donc équivalente à la résolution de cette équation, donc à l'existence d'une primitive de la fonction apparaissant dans le membre de droite.
Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{f_1(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (quotient de telles fonctions, le dénominateur ne s'annulant pas), cette équation admet une solution, λ, de classe

$\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction λ permet, en posant $f = \lambda f_1$, de construire une solution $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_g).
Une remarque finale : l'endomorphisme u est surjectif, non injectif (son noyau est de dimension 1). Ce phénomène ne peut se produire si E est de dimension finie. L'espace E de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ *n*'est *pas* de dimension finie.

Correction de l'exercice 4. 1. Soit

$$\begin{aligned}\varphi :&\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ &f \longmapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right)\end{aligned}$$

(a) Remarquons d'abord que φ est bien définie car, pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi(f)$ est la primitive de f s'annulant en 0 donc est bien de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(f+\lambda g)(x) &= \int_0^x (f+\lambda g)(t)dt\\ &= \int_0^x (f(t)+\lambda g(t))dt\\ &= \int_0^x f(t)dt + \lambda \int_0^x g(t)dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\ &= \varphi(f)(x) + \lambda\varphi(g)(x).\end{aligned}$$

Ainsi : $\varphi(f+\lambda g) = varphi(f) + \lambda\varphi(g)$.
Donc φ est linéaire.

(b) Soit $f \in \ker(\varphi)$. Alors $\varphi(f)$, qui est une primitive de f, est la fonction nulle. Donc f est la fonction nulle. Ainsi $\ker(\varphi) \subset \{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$ et l'inclusion réciproque étant évidente :

$$\ker(\varphi) = \{0_{\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}.$$

D'après la remarque du début de la question précédente, $\varphi(f)$ est la primitive de f s'annulant en 0. Ainsi :

$$\operatorname{Im}(\varphi) \subset \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid g(0) = 0\}.$$

Montrons l'inclusion réciproque : soit $g\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $g(0) = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(g')(x) = \int_0^x g'(t)dt = g(x) - g(0) = g(x).$$

Ainsi $g = \varphi(g')$.
Par conséquent $g \in \operatorname{Im}(\varphi)$ et on a finalement montré :

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid g(0) = 0\}.$$

(c) D'après la question précédente φ est injective donc $\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Im}(\varphi)$ est injective et surjective donc c'est un isomorphisme.
De plus, la question précédente donne :

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} :&\{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid g(0) = 0\} \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ &g \longmapsto g'\end{aligned}$$

2. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

(a) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(u + \lambda v) = \varphi((u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}})) = (u_{n+1} + \lambda v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \varphi(u) + \lambda\varphi(v).$$

Donc φ est linéaire.

(b) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$u \in \ker(\varphi) \iff \varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 0.$$

Soit $e = (e_n)_n$ la suite définie par :

$$\mathrm{e}_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad u_n = 0.$$

Alors :

$$u \in \ker(\varphi) \iff u = u_0 e.$$

Donc $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}(e)$. De plus pour tout $v = (v_n)_n$, si on pose u la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = v_{n-1}$$

alors on a :

$$\varphi(u) = v.$$

Donc φ est surjective.

Correction de l'exercice 5. 1. Par récurrence :

- Initialisation : le cas $k = 0$ est évident.
- Hérédité : supposons que $u^k \circ v = v \circ u^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et montrons que

$$u^{k+1} \circ v = v \circ u^{k+1}.$$

On a

$$\begin{aligned} u^{k+1} \circ v = u \circ u^k \circ v &= u \circ v \circ u^k && \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &= v \circ u \circ u^k && \text{car } u \text{ et } v \text{ commutent,} \\ &= v \circ u^{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $k + 1$.

- Conclusion : par le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k \circ v = v \circ u^k.$$

2. Par récurrence :

- Initialisation : le cas $n = 0$ est évident.

- Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= (u+v) \circ (u+v)^n \\
&= (u+v) \circ \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} \right) \quad \text{par hypothèse de récurrence,} \\
&= u \circ \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} \right) + v \circ \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} \right) \quad \text{par définition de } u+v, \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u \circ u^k \circ v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v \circ u^k \circ v^{n-k} \quad \text{par linéarité de } u \text{ et de } v.
\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente dans la deuxième somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{k+1} \circ v^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v \circ v^{n-k} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} u^i \circ v^{n+1-i} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n+1-k} \quad \text{en faisant le changement de var} \\
&= \binom{n}{n} u^{n+1} \circ v^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} u^i \circ v^{n+1-i} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n+1-k} + \binom{n}{0} u^0 \circ v^{n+1} \\
&= u^{n+1} \circ v^0 + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) u^i \circ v^{n+1-i} + u^0 \circ v^{n+1} \\
&= u^{n+1} \circ v^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} u^i \circ v^{n+1-i} + u^0 \circ v^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} u^i \circ v^{n+1-i}.
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.
- Conclusion : par le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} = v \circ u^k.$$

2 Avec le théorème du rang

Correction de l'exercice 6.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors $\deg(P') \leq n-1$ donc :

$$\deg(\varphi(P)) \leq \max(\deg((X-b)(P'-P'(b))), \deg(P-P(b))) = n.$$

Ainsi φ est bien définie.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(P+\lambda Q) &= (X-b)((P+\lambda Q)' - (P+\lambda Q)'(b)) - 2(P+\lambda Q - (P+\lambda Q)(b)\\ &= (X-b)(P' + \lambda Q' - P'(b) - \lambda Q'(b)) - 2(P + \lambda Q - P(b) - \lambda Q(b))\\ &= (X-b)(P' + P'(b)) - 2(P - P(b)) + \lambda(X-b)(Q' + Q'(b)) - 2(Q - Q(b))\\ &= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire et est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Il est clair que $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \quad P = (X-b)^3 Q\} \subset F$.
Réciproquement, soit $P \in F$. Alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$P = (X-b)^3 Q.$$

En regardant les degrés on obtient :

$$n \geq \deg(P) = \deg((X-b)^2) + \deg(Q) = 3 + \deg(Q).$$

Donc $\deg(Q) \leq n-3$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$. Ainsi $P \in \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \quad P = (X-b)^3 Q\}$.
Cela montre que $F \subset \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \quad P = (X-b)^3 Q\}$ et finalement :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \quad P = (X-b)^3 Q\}.$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}F &= \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \quad P = (X-b)^3 Q\}\\ &= \{(X-b)^3(a_0 + \cdots + a_{n-3}X^{n-3}) \ ; \ a_0, \ldots, a_{n-3} \in \mathbb{R}\}\\ &= \mathrm{Vect}((X-b)^3 X^k \ , \ k \in [\![0, n-3]\!]).\end{aligned}$$

La famille $((X-b)^3 X^k)_{k \in [\![0,n-3]\!]}$ est génératrice de F. Par ailleurs elle est formée de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc elle est libre.
Il s'agit par conséquent d'une base de F et $\dim(F) = n-2$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :

$$\varphi(P)' = P' + P'(b) + (X-b)P'' - 2P'$$

et

$$\varphi(P)'' = P'' + P'' + (X-b)P''' - 2P''.$$

On veut montrer que $\varphi(P)$ appartient à F c'est-à-dire que la multiplicité de b comme racine de φ est au moins égale à 3. On peut déjà remarquer avec les calculs ci-dessus que b est bien racine de $\varphi(P)$, $\varphi(P)'$ et $\varphi(P)''$. Il existe donc $U \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\varphi(P) = (X-b)U.$$

En dérivant deux fois on obtient :

$$\varphi(P)' = U + (X-b)U'$$

et comme $\varphi(P)'(b) = 0$ on en déduit que $U(b) = 0$. Il existe donc $V \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$U = (X-b)V \quad \text{càd} \quad \varphi(P) = (X-b)^2 V.$$

En dérivant une deux fois, on a :

$$\varphi(P)'' = (2(X-b)V + (X-b)^2V')' = 2V + 2(X_b)V' + 2(X-b)V' + (X-b)^2V''$$

et comme $\varphi(P)''(b) = 0$ on en déduit $V(b) = 0$. Il existe donc $W \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$V = (X-b)W \quad \text{càd} \quad \varphi(P) = (X-b)^3 W.$$

Ainsi $\varphi(P) \in F$.

Cela montre que $\mathrm{Im}(P) \subset F$.

(d) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et supposons $\deg(P) \geq 3$. Alors il existe $k \geq 3$ et $a_k \neq 0$ tels que :

$$P = a_k X^k \ + \ \text{termes de degré inférieur.}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= (X-b)(ka_kX^{k-1} + \text{termes de deg inférieur}) - 2(a_kX^{k-1} + \text{termes de deg inférieur}) \\ &= (k-2)a_kX^k \ + \ \text{termes de deg inférieur.}\end{aligned}$$

Comme $k \geq 3$, on en déduit que $\deg(\varphi(P)) = k$ et en particulier, $\varphi(P) \neq 0$.

Par contraposition, si $\varphi(P) = 0$ alors $\deg(P) \leq 2$.

(e) D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1.$$

Or d'après les questions précédentes :

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq n-2 \quad \text{et} \quad \dim(\ker(\varphi)) \leq 3.$$

Si l'une des deux inégalités est stricte alors on aurait :

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) < n-2+3 = n+1$$

en contradiction avec le théorème du rang.

Par conséquent, les deux inégalités sont des égalités :

$$\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n-2 \quad \text{et} \quad \dim(\ker(\varphi)) = 3.$$

Puis un argument de dimension permet de conclure que :

$$\mathrm{Im}(\varphi) = F \quad \text{et} \quad \ker(\varphi) = \mathbb{R}_2[X].$$

Correction de l'exercice 7.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, A') \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f(A+\lambda A') &= (a+\lambda a'+e+\lambda e'+i+\lambda i', c+\lambda c'+e+\lambda e'+g+\lambda g', \\ &\quad a+\lambda a'+c+\lambda c'+g+\lambda g'+i+\lambda i') \\ &= (a+e+i, c+e+g, a+c+g+i)+\lambda(a'+e'+i', c'+e'+g', a'+c'+g'+i') \\ &= f(A)+\lambda f(A'). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(A, A') \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f\left(A+\lambda A'\right) = f\left(A\right)+\lambda f\left(A'\right).$$

Donc f est linéaire.

2. Comme $\dim\left(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\right) = 9 > \dim(\mathbb{R}^3)$ alors f n'est pas injective.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \in \ker(f) \iff f(A) = (0,0,0) &\iff \begin{cases} a+e+i = 0 \\ c+e+g = 0 \\ a+c+g+i = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+e+i = 0 \\ c+e+g = 0 \\ -e+c+g = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -i \\ c = -g \\ e = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ker(f) &= \left\{ \begin{pmatrix} -i & b & -g \\ d & 0 & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, (b,d,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F}$ définie par :

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est génératrice de $\ker(f)$.
Montrons qu'elle est libre. Soit $(b,d,f,g,h,i) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned} i\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}&\\ +d\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}&=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\ \iff\begin{pmatrix}-i&b&-g\\d&0&f\\g&h&i\end{pmatrix}&=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}\\ \iff b=d=f=g=h=i=0.& \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de $\ker(f)$. C'est donc $\mathcal{F}$ une base de $\ker(f)$. En particulier, $\dim(\ker(f))=6$.

4. D'après le théorème du rang, on déduit :

$$9=\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))=\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=6+\dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f))=3$. Or $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donc, comme $\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(\mathbb{R}^3)$, alors $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$. Ainsi f est surjective.

Correction de l'exercice 8.

1. Soit $y\in\mathrm{Im}(f)$. Il existe $x\in E$ tel que : $y=f(x)$. Par conséquent :

$$f(y)=f(f(x))=f^2(x)=0$$

car $f^2=0_{\mathcal{L}(E)}$.
Ainsi $y\in\ker(f)$. Cela montre : $\mathrm{Im}(f)\subset\ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang :

$$3=\dim(E)=\dim(\ker(f))+\mathrm{rg}(f).$$

Or, on déduit de la question précédente que $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathrm{Im}(f))\leq\dim(\ker(f))$. D'où

$$3=\dim(\ker(f))+\mathrm{rg}(f)\leq 2\dim(\ker(f)).$$

Ainsi $\dfrac{3}{2}\leq\dim(\ker(f))$ et comme la dimension d'un espace vectoriel est un entier alors on en déduit bien :

$$2\leq\dim(\ker(f)).$$

Comme $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim(E)=3$ alors la dimension de $\ker(f)$ est soit égale à 2 soit égale à 3.
Or, si $\dim(\ker(f))=3$ alors $\ker(f)=\mathbb{R}^3$ ce qui implique que f est nulle. Cela contredit l'énoncé.
Donc $\dim(\ker(f))=2$.

Correction de l'exercice 9. On a $H=\mathrm{Vect}((1,1,1,1))$ donc H est de dimension 1.

Supposons qu'il existe une application linéaire f de E dans F dont H est le noyau. D'après le théorème du rang on a donc :

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im(f)}) = \dim(E)$$

c'est-à-dire :

$$1 + \dim(\mathrm{Im(f)}) = 4.$$

Ainsi, on devrait avoir $\dim(\mathrm{Im(f)}) = 3$. Mais comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, sa dimension est inférieur ou égale à $\dim(F) = 2$.
Donc un tel f ne saurait exister.

Correction de l'exercice 10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

— Supposons que la dimension de E est paire : $\dim(E) = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2k})$ une base de E. On définit un unique endomorphisme f de E en posant :

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad f(e_i) = 0$$

et

$$\forall i \in [\![k+1, 2k]\!], \quad f(e_i) = e_i.$$

Alors il est clair que :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_{2k})$$

et ainsi :

$$\dim(\ker(f)) = k = dim(\mathrm{Im}(f)).$$

— Réciproquement supposons qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f) = k$. D'après le théorème du rang on a :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2k.$$

Ainsi $\dim(E)$ est paire.

Correction de l'exercice 11. On définit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ Q &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}. \end{aligned}$$

On remarque que f est bien définie car $\deg(\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}) \leq \max(\deg(Q^{(k)}), k \in [\![0, n]\!]) \leq n$.

On montre de plus sans difficulté (linéarité de la dérivation et de la somme) que f est linéaire.
Montrons que f est injective. Soit $Q \in \ker(f)$ et supposons Q non nul. On note alors $p \in \mathbb{N}$ son degré et a_p son coefficient dominant. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a :

$$\deg(Q^{(k)}) < \deg(Q) = p.$$

Ainsi

$$f(Q) = Q + \sum_{k=1}^{n} Q^{(k)} = a_p X^p \ + \ \text{terme de degré inférieur.}$$

En particulier, $f(Q)$ est de degré p et non nul ! Cela montre que $\ker(f) = \{0\}$.
Donc f est en endomorphisme injectif de l'espace vectoriel de dimension fine $\mathbb{R}_n[X]$. D'après l'un des corollaires du théorème du rang, c'est donc un isomorphisme. En particulier f est surjectif donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(Q) = P$ c'est-à-dire :

$$P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}.$$

3 Représentation matricielle

Correction de l'exercice 12. 1. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r + \lambda_4 s = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 p(x) + \lambda_2 q(x) + \lambda_3 r(x) + \lambda_4 s(x) = 0.$$

Alors, avec $x = \frac{\pi}{2}$ il vient :

$$e^{\frac{\pi}{2}} \lambda_2 + e^{-\frac{\pi}{2}} \lambda_4 = 0 \quad \text{i.e} \quad \lambda_4 = -e^{\pi} \lambda_2;$$

avec $x = -\frac{\pi}{2}$:

$$-e^{-\frac{\pi}{2}} \lambda_2 - e^{\frac{\pi}{2}} \lambda_4 = 0 \quad \text{i.e} \quad \lambda_4 = -e^{-\pi} \lambda_2.$$

On en déduit alors $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$.
De même, avec $x = 0$ il vient

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

donc $\lambda_= - \lambda_3$ et avec $x = \pi$:

$$-\lambda_1 e^{\pi} - e^{-\pi} \lambda_3 = 0.$$

On déduit que $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi la famille (p, q, r, s) est libre.

2. L'application D est linéaire. La seule chose à faire est de montrer que $D(F) \subset F$. Pour cela il suffit de vérifier que $D(p)$, $D(q)$, $D(r)$ et $D(s)$ sont bien dans F. Or on vérifie en dérivant que :

$$D(p) = p - q \quad ; \quad D(q) = p + q \quad ; \quad D(r) = -r - s \quad ; \quad D(s) = -s + r.$$

Ainsi on a bien $D(F) \subset F$.

3. D'après ce qui précède :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. On a :
$$M^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$
Comme M est inversible alors en restriction à F l'application D est bijective : il y a une unique primitive de f dans F. Comme les coordonnées de f dans (p,q,r,s) sont $(2,1,1,-1)$ les coordonnes de $D^{-1}(f)$ dans (p,q,r,s) sont :
$$M^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}.$$
Ainsi :
$$D^{-1}(f)=\frac{1}{2}(p+3q+2s).$$
Une primitive de f est donc
$$x\mapsto\frac{1}{2}(e^x(\cos(x)+3\sin(x))+2e^{-x}\sin(x)).$$

Correction de l'exercice 13.

1. Montrons que φ est linéaire : soient $(M,N)\in(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned}\varphi(M+\lambda N)&=A(M+\lambda N)-(M+\lambda N)A\\&=AM+\lambda AN-MA-\lambda NA\\&=AM-MA+\lambda(AN-NA)\\&=\varphi(M)+\lambda\varphi(N).\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\forall(M,N)\in(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad\varphi(M+\lambda N)=\varphi(M)+\lambda\varphi(N).$$
L'application φ est donc linéaire. Comme elle est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ il s'agit d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit $\mathcal{B}=(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :
$$\begin{aligned}C=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)&=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(E_{1,1}),\varphi(E_{1,2}),\varphi(E_{2,1}),\varphi(E_{2,2}))\\&=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}0&2&2&0\\-2&0&0&2\\-2&0&0&2\\0&-2&-2&0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} M \in \ker(\varphi) &\Longleftrightarrow C\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow C \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 2b & + & 2c & = & 0 \\ -2a & + & 2d & = & 0 \\ -2a & + & 2d & = & 0 \\ -2b & - & 2c & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} b & = & -c \\ a & = & d \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Ainsi : $\ker(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

D'après le théorème du rang on a :

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi).$$

Or, on a vu que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\ker(\varphi)$. Comme elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre. Par conséquent c'est une base de $\ker(\varphi)$ et $\dim(\ker(\varphi)) = 2$. On en déduit donc :

$$4 = 2 + \mathrm{rg}(\varphi)$$

c'est-à-dire : $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$.

4. (a) L'ensemble $\mathcal{C}$ des matrices qui commutent avec A est le noyau de φ. Donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel.

   (b) D'après les questions précédentes, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{C}$.

Correction de l'exercice 14.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On rappelle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ signifie que :

- la première colonne de M donne les coordonnées de $f(1)$ dans la base $\mathcal{B}$;
- la deuxième colonne de M donne les coordonnées de $f(X)$ dans la base $\mathcal{B}$;
- la troisième colonne de M donne les coordonnées de $f(X^2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. • **Noyau de f :** soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors on a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff M \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 2c & - & a & = & 0 \\ & & b & = & 0 \\ & & 3a & = & 0 \end{array} \right. \qquad \iff a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\ker(f) = \{0\}$.

• **Image de f :** f est un **endomorphisme** de $\mathbb{R}_2[X]$ injectif. Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie tout endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_2[X]$ est bijectif (donc surjectif). Ainsi f est surjectif d'où :

$$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_2[X].$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(X, X^2+1, X^2-1) &= \operatorname{rg}(X, X^2+1, X^2-1+X^2+1) \\ &= \operatorname{rg}(X, X^2+1, 2X^2) \\ &= \operatorname{rg}(X, X^2+1, X^2) \\ &= \operatorname{rg}(X, X^2+1-X^2, X^2) \\ &= \operatorname{rg}(X, 1, X^2) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Vect}(X, X^2+1, X^2-1)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3. Or $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$ donc :

$$\operatorname{Vect}(X, X^2+1, X^2-1) = \mathbb{R}_2[X].$$

Par conséquent, (X, X^2-1, X^2+1) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) On note $\mathcal{B}'$ la base de la question précédente. La matrice M' est alors définie par :

$$M' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(X), f(X^2+1), f(X^2-1)).$$

Déterminons les coordonnées de $f(X)$, $f(X^2+1)$ et $f(X^2-1)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Remarquons que, d'après la remarque en début d'exercice, on a :

$$f(1) = 2 - X^2 \quad ; \quad f(X) = X \quad ; \quad f(X^2) = -1 + 2X^2.$$

Ainsi :

- $f(X) = X$ donc les coordonnées de $f(X)$ dans $\mathcal{B}'$ sont $(1, 0, 0)$;

- $f(X^2+1) = f(X^2) + f(1) = 1 + X^2$ donc les coordonnées de $f(X^2+1)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(0,1,0)$;
- $f(X^2-1) = f(X^2) - f(1) = 3(X^2-1)$ donc les coordonnées de $f(X^2-1)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(0,0,3)$.

Finalement, on obtient :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après les formule de changement de bases on a :

$$M' = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} M P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

En notant $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ on a donc bien l'égalité souhaitée. Enfin :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X, X^2+1, X^2-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 15.

1. A est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont non nuls donc A est inversible.
2. (a) Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$f(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i.$$

Ainsi, la matrice de f est A (attention au décalage d'indice : les colonnes de A sont numérotées de 1 à $n+1$ alors que les éléments de la base canonique sont numérotées de 0 à n).

(b) Comme A est inversible, f est bijective. De plus, en notant $g : P \mapsto P(X-1)$ on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f \circ g(P) = f(P(X-1)) = P(X+1-1) = P$$

et

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad g \circ f(P) = g(P(X+1)) = P(X-1+1) = P.$$

Ainsi $g = f^{-1}$.

(c) On en déduit que A^{-1} est la matrice de g dans la base canonique. Or pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$g(X^j) = (X-1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i} X^i.$$

donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & & \cdots & (-1)^{n-1} n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & \cdots & (-1)^{n-2}\binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (-1)^{i-j}\binom{j-1}{i-1} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 16. Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts. On note φ l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), \dots, \mathbb{P}(a_n)). \end{aligned}$$

1. (a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(a_0), \dots, (P + \lambda Q)(a_n)) \\ &= (P(a_0), \dots, \mathbb{P}(a_n)) + \lambda(Q(a_0), \dots, \mathbb{Q}(a_n)) \\ &= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q). \end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

(b) Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors $\varphi(P) = (0, \dots, 0)$ donc

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(a_i) = 0.$$

Ainsi P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n possédant $n+1$ racines. C'est donc le polynôme nul.
D'où :

$$\ker(\varphi) = \{0\}.$$

Ainsi φ est injective. Or $\dim(R_n[X]) = n + 1 = \dim(R^{n+1})$ donc d'après un corollaire du théorème du rang, on en déduit que φ est bijective. C'est donc φ est un isomorphisme.

2. On a pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\varphi(X^i) = (a_0^i, \dots, a_n^i).$$

Donc la matrice M_1 de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

3. On considère la famille suivante (voir TD6 exercice 5) :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

(a) Voir TD6 exercice 5.

(b) D'après l'exercice 5 du TD6 on a :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la matrice de φ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ et la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est la matrice identité I_n.

(c) Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On cherche un polynôme P tel que

$$\varphi(P) = (x_0, \dots, x_n)$$

c'est-à-dire tel que :

$$\mathrm{Mat}_{(L_0,\dots,L_n),\mathcal{B}_c}(\varphi)\mathrm{Mat}_{(L_0,\dots,L_n)}(P) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, d'après la question précédente, tel que :

$$I_n\mathrm{Mat}_{(L_0,\dots,L_n)}(P) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de prendre P tel que :

$$\mathrm{Mat}_{(L_0,\dots,L_n)}(P) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donc :

$$P = \sum_{k=0}^{n} x_k L_k.$$

Correction de l'exercice 17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$ la matrice d'une application g relativement à la base $\mathcal{B}$ de l'espace de départ et la base $\mathcal{C}$ de l'espace d'arrivée.

1. Pour montrer que la famille $\mathcal{C} = (1, X - 2X^2, 1 - 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ il suffit de montrer que la matrice, contenant dans chaque colonne les coordonnées des vecteurs de la famille $\mathcal{C}$ relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est inversible.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul (qu'on laisse au lecteur) basé sur l'algorithme de Gauss montre que c'est le cas et que

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice P est finalement la matrice de changement de la base $\mathcal{B}_c$ vers la base $\mathcal{C}$ c'est-à-dire :

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}_c}(\mathrm{id})$$

2. En écrivant $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]} \circ f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ en termes de produit matriciel, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{C}}(\mathrm{id})\mathcal{M}_{\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}_c}(\mathrm{id}) = P^{-1}MP.$$

   Le calcul donne

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -11 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 18. Dans tout l'exercice, on considère que les lignes et colonnes des matrices sont numérotées de 0 à $n-1$.

1. Sous réserve que $\mathcal{F}$ soit une base, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathcal{F}$ est

$$F = (e^{\frac{ik\ell 2\pi}{n}})_{0\leq \ell,k\leq n-1}$$

   Cette matrice est symétrique. La conjuguée de sa transposée (en fait la transposition est inutile) est

$${}^t\overline{F} = (e^{-\frac{ik\ell 2\pi}{n}})_{0\leq k,\ell\leq n-1}$$

   Soit $k, k' \in [\![0, n-1]\!]$ et $\delta_{k,k'}$ l'élément en position (k', k) dans la matrice ${}^t\overline{F}F$.
   Par la formule générale du produit matriciel, on a

$$\delta_{k,k'} = \sum_{\ell=0}^{n-1} e^{-\frac{ik\ell 2\pi}{n}} e^{+\frac{ik'\ell 2\pi}{n}} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i(k'-k)\ell 2\pi}{n}}\right)^{\ell}$$

   On reconnait là la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique et on a donc

$$\delta_{k,k'} = \begin{cases} n & \text{si } e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}} = 1 \\ \dfrac{1-\left(e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}}} & \text{si } e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}} \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} n & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{si } k \neq k' \end{cases}$$

   Quelques précisions sur ce calcul :
   — $\left(e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}}\right)^n = (e^{i(k'-k)2\pi} = 1\,;$
   — la condition $e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}} \neq 1$ équivaut à $k \neq k'$ lorsque $k, k' \in [\![0, n-1]\!]$. En effet, on remarque d'abord que :

$$-(n-1) \leq k' - k \leq n-1.$$

   La condition $e^{\frac{i(k'-k)2\pi}{n}} = 1$ équivaut au fait qu'il existe un entier relatif a tel que $\dfrac{(k'-k)2\pi}{n} = a2\pi$, simplifié, cela signifie que

$$k' - k = an.$$

   On a donc : $-(n-1) \leq an \leq n-1$ c'est-à-dire montre que $-1 < a < 1$.
   Le seul entier relatif vérifiant cela est $a = 0$ et donc $k = k'$.

   Finalement, cela montre que :

$${}^t\overline{F}F = n.I_n$$

   et donc F est inversible, d'inverse $F^{-1} = \dfrac{1}{n}{}^t\overline{F}$.
   Cela montre au passage que la famille $\mathcal{F}$ est une base et que F est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{C}^n$ vers $\mathcal{F}$.

2. On se donne un vecteur $a \in \mathbb{C}^n$ et on considère une matrice A carrée d'ordre n dont le coefficient à la place (k,ℓ) est $a_{k-\ell}$ lorsque $k \geq \ell$ et $a_{n+k-\ell}$ lorsque $k < \ell$ (avec $k, \ell \in [\![0, n-1]\!]$).
   (a) Donnons des exemples pour $n = 3$ et $n = 4$.
   — Pour $n = 3$ et $a = (a_0, a_1, a_2)$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

   — Pour $n = 4$ et $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

   On voit que la première colonne est formée du vecteur a et que pour passer d'une colonne à la suivante, on "fait tourner" les coefficients en les décalant vers le bas et en faisant remonter le dernier en première position. D'où, probablement, le nom de "matrice cyclique".
   (b) On considère l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Calculons, pour chaque vecteur e_k le produit Ae_k que nous noterons f_k.
   Le coefficient d'indice ℓ de f_k est

$$(f_k)_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} A_{\ell,j}(e_k)_j = \sum_{j=0}^{n-1} A_{\ell,j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} = \sum_{j=0}^{\ell-1} A_{\ell,j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} + \sum_{j=\ell+1}^{n-1} A_{\ell,j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} + A_{\ell,\ell} e^{\frac{ik\ell2\pi}{n}}$$

   On a donc, en utilisant la formule pour $A_{\ell,j}$ (attention, les noms des indices sont changés par rapport à l'énoncé),

$$(f_k)_\ell = \sum_{j=0}^{\ell-1} a_{\ell-j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} + \sum_{j=\ell+1}^{n-1} a_{n+\ell-j} e^{\frac{ijk2\pi}{n}} + a_0.e^{\frac{ik\ell2\pi}{n}}$$

   Dans le première somme, effectuons le changement d'indice $j' = \ell - j$ (on a donc j' varie de 1 à ℓ) et dans la deuxième $j' = n + \ell - j$ (on donc j' varie de $n-1$ à $\ell+1$) pour obtenir

$$(f_k)_\ell = \sum_{j'=1}^{\ell} a_{j'} e^{\frac{i(\ell-j')k2\pi}{n}} + \sum_{j'=\ell+1}^{n-1} a_{j'} e^{\frac{i(n+\ell-j')k2\pi}{n}} + a_0.e^{\frac{ik\ell2\pi}{n}}$$

   comme on remarque que $e^{\frac{i(n+\ell-j')k2\pi}{n}} = e^{\frac{i(\ell-j')k2\pi}{n}}$, on a alors (on change tous les j' en j), puis en factorisant $e^{\frac{i\ell k2\pi}{n}}$,

$$(f_k)_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{\frac{i(\ell-j)k2\pi}{n}} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{\frac{-ijk2\pi}{n}}\right).e^{\frac{i\ell k2\pi}{n}}$$

En posant $\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{\frac{-ijk2\pi}{n}}$ (noter l'absence de ℓ dans cette expression), on a donc

$$A.e_k = f_k = \lambda_k.e_k$$

La matrice cherchée est donc

$$D = diag(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}).$$

(c) On a

$$F^{-1}.A.F = D$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n}.{}^t F\overline{F}AF = D$$