Chapitre 9

Variables aléatoires discrètes

Dans tout le paragraphe, X désigne une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

9.3 Lois usuelles

9.3.1 Lois usuelles finies

Loi certaine

1. On dit que X suit la loi certaine si elle ne prend qu'une seule valeur $a \in \mathbb{R}$:
$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = a) = 1.$$
2. Si X suit une loi certaine avec $X(\Omega) = \{a\}$ alors
$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$
3. Une variable aléatoire X suit une loi certaine si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :
   i) $X(\Omega) = \{0, 1\}$
   ii) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors
$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Expérience de référence. On considère une expérience aléatoire possédant deux issues :

— une issue nommée « succès » qui se produit avec probabilité p ;

— l'autre nommée « échec » qui produit avec probabilité $1 - p$

(une telle expérience est appelée une épreuve de Bernoulli).
La variable aléatoire X égale à 1 en cas de succès et à 0 en cas d'échec suit une loi $\mathcal{B}(p)$.

Exemple 9.1 (**Fonction indicatrice**). Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement. On note 1_A la variable aléatoire définie par :

$$\begin{aligned} 1_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

Loi binomiale

Soient $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Binomiale de paramètres n et p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si :
   i) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
   ii) $\forall k \in= [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Expérience de référence. On considère une expérience aléatoire qui consiste à répéter n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ si :
   i) $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$
   ii) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{n}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Expérience de référence On considère une expérience aléatoire qui possède n issues différentes numérotées de 1 à n qui sont équiprobables.
La variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue suit une loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Remarque 9.1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a < b$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $[\![a,b]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ si :
   i) $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$
   ii) $\forall k \in [\![a,b]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{b-a+1}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

9.3.2 Lois usuelles discrètes infinies

Loi géométrique

Soit $p \in]0,1[$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de géométrique de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :
   i) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
   ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

3. **Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
   La variable aléatoire X donnant le rang du premier succès obtenu suit une loi $\mathcal{G}(p)$.

Exemple 9.2 (Simulation d'une loi géométrique). Pour rappel (cf TP3) la fonction `rd.rand()` de la bibliothèque `random.numpy` tire un nombre aléatoire de $[0,1[$ selon la loi :

$$\mathbb{P}(\texttt{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I)$$

pour tout intervalle $I \subset [0,1[$.

```python
def simule_geo(p):
        succes = 0 # 0 pour un échec , 1 pour un succes
        nb_essais = 0
        while succes == 0:
                if rd.rand()<p:
                        succes = 1
                nb_essais += 1
        return nb_essais
```

Proposition 9.1 (Absence de mémoire)

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléaoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. Alors, pour tout $(s,t) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a :

$$\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :
   i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
   ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$