Lycée Pierre-Gilles de Gennes — 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM3 – À rendre le 12/01/2026

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice 1 - Autour des séries exponentielles

Partie 1 - Un équivalent pour $n!$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$w_n = \frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n \quad , \quad v_n = \ln(w_n) \quad \text{et} \quad u_n = v_{n+1} - v_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1$.

2. **(a)** Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$.

(b) En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{12n^2}$.

(c) Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$.

3. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k$.

(b) En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et exprimer sa limite en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Dans la suite, on notera ℓ cette limite.

4. **(a)** Justifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et exprimer sa limite en fonction de ℓ.

(b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

6. Faire une petite pause.

Partie 2 - Convergence des séries exponentielles

Soit $x \in \mathbb{R}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction définie pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} + e^s \int_0^s \frac{e^{-t}}{n!} t^n dt.$$

(a) Montrer que f_n est dérivable et calculer sa dérivée.

(b) En déduire que f_n est solution d'une équation différentielle homogène puis déterminer f_n.

8. Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{|x|} \frac{(|x|)^{n+1}}{n!}$.

9. En déduire que $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et que sa limite est e^x.

Partie 3 - La fonction Gamma

Pour tout réel $x > 0$, on définit l'intégrale généralisée :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

10. Soit $x > 0$.

(a) Montrer que $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

Indication : on pourra commencer par justifier que $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$.

(b) On admet qu'il existe une constante $D > 0$ telle que : $\forall t \geq 1, \quad t^{x+1}e^{-t} \leq D$.

Montrer que $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

(c) En déduire que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

11. Encore une petite pause !

12. En effectuant une intégration par parties, montrer que : $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

13. (a) Calculer $\Gamma(1)$.

(b) Déduire de 12 que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \Gamma(n+1) = n!$.

14. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{2t}$, montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Indication : on pourra utiliser sans le montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Partie 3 - Les lois Gamma

Soit $x > 0$, $\lambda > 0$ et $f_{x,\lambda}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_{x,\lambda}(s) = \begin{cases} \dfrac{s^{x-1}}{\Gamma(x)\lambda^x} e^{-\frac{s}{\lambda}} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

15. Montrer que $f_{x,\lambda}$ est une densité de probabilité.

Indication : on pourra utiliser les résultats de la partie précédente et faire un changement de variable.

On dira qu'une variable aléatoire X suit la loi Gamma de paramètres x et λ si X est à densité et admet $f_{x,,\lambda}$ pour densité.

16. **(a)** Reconnaître la loi Gamma de paramètres $(x, \lambda) = \left(1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$.

(b) Donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

17. Une variable aléatoire X suivant la loi Gamma de paramètres x et λ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

18. Même question pour la variance.

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$et $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(s) = \begin{cases} 1 - e^{-s} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

(b) Soit Y une variable dont la fonction de répartition est F_n. Déterminer une densité de Y.

(c) Quelle est la loi de Y ?

20. Soit Z un variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

(a) Déterminer la fonction de répartition de Z^2.

(b) En déduire que Z^2 suit une loi Gamma de paramètres à déterminer.

*Indication : on pourra de la question **14**.*