Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025-2026

BCPST2 – Mathématiques

DM 3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice 1 - Autour des séries exponentielles

Partie 1 - Un équivalent pour $n!$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$w_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \quad , \quad v_n = \ln(w_n) \quad \text{et} \quad u_n = v_{n+1} - v_n.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les propriétés du logarithme on a :

$$v_n = \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n\right) = \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) + n - n\ln(n)$$

et

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln((n+1)!) - \frac{1}{2}\ln(n+1) + n + 1 - (n+1)\ln(n+1) \\ &= \ln(n+1) + \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n+1) + n + 1 - (n+1)\ln(n+1) \\ &= \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n+1) + n + 1 - n\ln(n+1). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n+1) + n + 1 - n\ln(n+1) - \ln(n!) + \frac{1}{2}\ln(n) - n + n\ln(n) \\ &= -\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) \\ &= -\left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) + 1 \\ &= -\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1. \end{aligned}$$

2. **(a)** $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

(b) Avec les questions précédentes :

$$\begin{aligned} u_n &= -\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 \\ &= -\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1. \end{aligned}$$

Avec ceci, on peut obtenir un développement de u_n à la précision $\frac{1}{n^2}$ (pour obtenir une précision $\frac{1}{n^2}$, il faudrait le DL à l'ordre 4 de $x \mapsto \ln(1+x)$ à cause de la multiplication par n) :

$$\begin{aligned}
u_n &= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+1\\
&= -\left(1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+1\\
&= \frac{-1}{12n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{12n^2}
\end{aligned}$$

(c) D'après ce qui précède : $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.

Or les séries $\sum_{n\geq 1}|u_n|$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{12n^2}$ sont à termes positifs et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{12n^2}$ est convergente.

D'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1}|u_n|$ est donc aussi convergente.

En particulier, $\sum_{n\geq 1}u_n$ est absolument convergente donc convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k).$$

Ainsi, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(v_{k+1}-v_k) = v_{n+1}-v_1 = v_{n+1}-1.$$

Ainsi, on a bien : $v_{n+1} = 1+\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(b) Comme la série $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge alors la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}u_k\right)_{n\geq 1}$ est convergente.

La question précédente permet de conclure que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n.$$

4. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n = e^{v_n}$ donc par continuité de la fonction exponentielle en ℓ, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e^{ℓ}.

(b) Comme $C = e^\ell > 0$, on a par la question précédente :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C$$

puis par compatibilité des équivalents avec le produit :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec la question précédente, on obtient l'équivalent suivant :

$$\frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{ex}{n}\right)^n \frac{1}{C\sqrt{n}}.$$

Il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\frac{ex}{n}\right| \leq 1.$$

On en déduit donc

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\left(\frac{ex}{n}\right)^n \frac{1}{C\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{C\sqrt{n}}.$$

En particulier, par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{ex}{n}\right)^n \frac{1}{C\sqrt{n}} = 0.$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$

6. Faire une petite pause.

Partie 2 - Convergence des séries exponentielles

Soit $x \in \mathbb{R}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction définie pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} + e^s \int_0^s \frac{e^{-t}}{n!} t^n dt.$$

(a) La fonction $s \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}$ est polynomiale donc dérivable.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{n!} t^n$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc possède une primitive F sur $\mathbb{R}$ qui est donc dérivable. La fonction $s \mapsto e^s \int_0^s \frac{e^{-t}}{n!} t^n dt = e^s(F(s) - F(0))$ est donc dérivable en tant que produit de fonctions dérivable.
De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f_n'(s) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{s^{k-1}}{k!} + e^s(F(s)-F(0)) + e^sF'(s)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{s^{k-1}}{(k-1)!} + e^s\int_0^s \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt + e^s\frac{e^{-s}}{n!}s^n\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{s^i}{i!} + e^s\int_0^s \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt + \frac{s^n}{n!}\\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{s^i}{i!} + e^s\int_0^s \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt.
\end{aligned}$$

Ainsi, $f_n' = f_n$.

(b) La fonction f_n est donc solution de l'équation $y' = y$. Il existe donc une constant λ telle que :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f(s) = \lambda e^s.$$

De plus, comme $f_n(0) = 1$ on déduit que $\lambda = 1$.

Ainsi :$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_n(s) = e^s$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = f_n(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt.$$

Donc :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt \right|.$$

— **Cas où** $x \geq 0$. On a pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leq \dfrac{e^{-t}}{n!}t^n \leq \dfrac{t^n}{n!}$ donc par croissance de l'intégrale (les bornes sont rangées dans l'ordre croissant) :

$$0 \leq e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt \leq e^x\int_0^x \frac{t^n}{n!}dt = \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \left| e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt \right| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

— **Cas où** $x \leq 0$. Par l'inégalité triangulaire (attention à bien remettre les bornes dans l'ordre) :

$$\left| e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt \right| \leq e^x\int_x^0 \frac{e^{-t}}{n!}|t|^n dt \leq \int_x^0 \frac{e^{-t}}{n!}|t|^n dt$$

car $e^x \leq 1$. En majorant e^{-t} par e^{-x} sur $[x, 0]$ on obtient alors

$$\left| e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{n!}t^n dt \right| \leq e^{-x}\int_x^0 \frac{|t|^n}{n!}dt = e^{-x}\frac{(|x|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ainsi, dans les deux cas

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{|x|} \frac{(|x|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

9. D'après la question **5.**, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{|x|} \dfrac{(|x|)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0$.

Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

Cela signifie exactement que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et que sa limite est e^x.

Partie 3 - La fonction Gamma

Pour tout réel $x > 0$, on définit l'intégrale généralisée :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

10. Soit $x > 0$.

(a) La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, 1]$ (et même sur $[0, 1]$ si $x \geq 1$). L'intégrale est donc généralisée en 0.
Par continuité de la fonction exponentielle en 0 et comme $e^0 = 1 \neq 0$: $e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} 1$.
Par compatibilité des équivalents avec le quotient : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$.
Les fonctions $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ et $t \mapsto t^{x-1}$ sont continues et positives sur $]0, 1]$ donc par le théorème d'équivalence, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}dt$ sont de même nature.
Soit $A \in]0, 1]$; on a :

$$\int_A^1 t^{x-1}dt = \left[\frac{t^x}{x}\right]_A^1 = \frac{1}{x} - \frac{A^x}{x}.$$

Comme $x > 0$ alors $\lim\limits_{A \to 0} \displaystyle\int_A^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge et donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ converge aussi.

(b) On admet qu'il existe une constante $D > 0$ telle que : $\forall t \geq 1, \quad t^{x+1}e^{-t} \leq D$.
La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc est $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ généralisée en $+\infty$.
En divisant par t^2 dans l'inégalité admise on obtient :

$$\forall t \geq 1, \quad 0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{D}{t^2}.$$

D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues et positives, si $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge aussi Étudions la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$: soit $A \geq 1$.

$$\int_1^A \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^A = 1 - \frac{1}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge.

(c) Soit $x > 0$. D'après les questions précédentes, $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ convergent donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est convergente.

11. Encore une petite pause !

12. Soit $x > 0$.

— Les fonctions $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ converge (et vaut $-x\Gamma(x)$) d'après la question précédente.

— $t \mapsto u(t)v(t)$ possède une limite finie en 0 (qui vaut 0) et en $+\infty$ (qui vaut 0 aussi par croissance comparée).

D'après le théorème d'intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge et

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt &= \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - \lim_{t\to 0} u(t)v(t) - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt \\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

13. (a) $\displaystyle\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

— **Initialisation :** c'est la question précédente.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\Gamma(n+1) = n!$.
D'après la question 12 on a :

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

— **Conclusion :** par principe de récurrence, on a montré : $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.

14. La fonction $u : t \mapsto \sqrt{2t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Or, on a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} u'(t)e^{-\frac{u(t)^2}{2}}dt.$$

Ainsi, par le théorème de changement de variable (comme la converge des intégrales a déjà été prouvée) on a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\int_{\lim_0 u}^{\lim_{+\infty} u} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Comme $\sqrt{2\pi} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, on en déduit :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Partie 3 - Les lois Gamma

Soit $x > 0$, $\lambda > 0$ et $f_{x,\lambda}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_{x,\lambda}(s) = \begin{cases} \dfrac{s^{x-1}}{\Gamma(x)\lambda^x}e^{-\frac{s}{\lambda}} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

15. La fonction $f_{x,\lambda}$ est clairement positive et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,\lambda}(s)ds$ converge et vaut 1.

La fonction $t : s \mapsto \dfrac{s}{\lambda}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante. D'après le théorème de changement de variable, comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t(s)^{x-1}e^{-t(s)}t'(s)ds$ converge et vaut $\Gamma(x)$.

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t(s)^{x-1}e^{-t(s)}t'(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{\lambda^{x-1}}e^{-\frac{s}{\lambda}}\frac{1}{\lambda}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{\lambda^x}e^{-\frac{s}{\lambda}}ds$$

En particulier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,\lambda}(s)ds = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{\lambda^x}e^{-\frac{s}{\lambda}}ds$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,\lambda}(s)ds = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^{x-1}}{\lambda^x}e^{-\frac{s}{\lambda}}ds = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x)} = 1.$$

Donc $f_{x,\lambda}$ est une densité de probabilité.

On dira qu'une variable aléatoire X suit la loi Gamma de paramètres x et λ si X est à densité et admet $f_{x,,\lambda}$ pour densité.

16. **(a)** Une densité de la loi Gamma de paramètres $(x, \lambda) = \left(1, \dfrac{1}{\lambda}\right)$ est donnée par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_{1,\frac{1}{\lambda}}(s) = \begin{cases} \dfrac{s^0}{\Gamma(1)\frac{1}{\lambda}}e^{-\frac{s}{\frac{1}{\lambda}}} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda s} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnait donc une loi exponentielle de paramètre λ.

(b) Voir cours.

17. Soit X suivant la loi Gamma de paramètres x et λ.

La variable X possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s f_{x,\lambda}(s)ds$ converge absolument.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |s f_{x,\lambda}(s)|ds$ est égale à $\displaystyle\frac{\lambda\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x+1,\lambda}(s)ds$ donc converge d'après la question 15.

Ainsi X possède une espérance et d'après la question 12 :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} s f_{x,\lambda}(s)ds = \frac{\lambda\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lambda x.$$

18. La variable X possède une variance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s^2 f_{x,\lambda}(s)ds$ converge absolument.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |s^2 f_{x,\lambda}(s)|ds$ est égale à $\displaystyle\frac{\lambda^2\Gamma(x+2)}{\Gamma(x)}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x+2,\lambda}(s)ds$ donc converge d'après la question 15.

Ainsi X possède un moment d'ordre 2 donc une variance et d'après la question 12 :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2 f_{x,\lambda}(s)ds = \frac{\lambda^2\Gamma(x+2)}{\Gamma(x)} = \lambda^2 x(x+1).$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 x(x+1) - (\lambda x)^2 = \lambda^2 x.$$

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$et $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad F_n(s) = \begin{cases} 1 - e^{-s}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) — La fonction F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ car constante et sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_n'(s) &= \begin{cases} e^{-s}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!} - e^{-s}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{ks^{k-1}}{k!} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-s}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!} - e^{-s}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{s^{k-1}}{(k-1)!} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-s}\dfrac{s^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}. \end{aligned}$$

— En particulier, F_n est continue sur $\mathbb{R}^*$ (car dérivable sur $\mathbb{R}^*$) et comme

$$\lim_{s\to 0^-} F_n(s) = \lim_{s\to 0^+} F_n(s) = F_n(0) = 0,$$

alors F_n est continue en 0.
Ainsi F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

— De plus, F_n' est positive sur $\mathbb{R}^*$ donc F_n est croissante sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et comme elle est continue, elle est finalement croissante sur $\mathbb{R}$.

— Il est clair que $\lim\limits_{s\to-\infty} F_n(s) = 0$ et par croissance comparée $\lim\limits_{s\to+\infty} F_n(s) = 1$.

Ainsi F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

(b) Soit Y une variable dont la fonction de répartition est F_n.
On a vu :

$$\forall s \in \mathbb{R}^*, \quad F_n'(s) = \begin{cases} e^{-s}\dfrac{s^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Ainsi, la fonction f définie par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f(s) = \begin{cases} e^{-s}\dfrac{s^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une densité de Y.

(c) On reconnaît la fonction $f_{n,1}$ donc Y suit la loi Gamma de paramètres $(n,1)$.

20. Soit Z un variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(a) — Comme Z^2 est positive, alors, pour tout $s<0$, on a

$$F_{Z^2}(s) = \mathbb{P}(Z^2 \leq s) = 0.$$

— Soit $s \geq 0$. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ on a :

$$F_{Z^2}(s) = \mathbb{P}(Z^2 \leq s) = \mathbb{P}(|Z| \leq \sqrt{s}) = \mathbb{P}(-\sqrt{s} \leq Z \leq \sqrt{s}) = F_Z(\sqrt{s}) - F_Z(-\sqrt{s}).$$

Ainsi :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad F_{Z^2}(s) = \begin{cases} F_Z(\sqrt{s}) - F_Z(-\sqrt{s}) & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) La fonction F_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc on en déduit par composition que F_{Z^2} est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Comme il est clair qu'elle l'est sur $]-\infty,0[$ alors F_{Z^2} est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
En particulier, F_{Z^2} est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, F_Z étant continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{s\to 0^+} F_{Z^2}(s) = F_Z(0) - F_Z(0) = 0 = F_{Z^2}(0) = \lim_{s\to 0^-} F_{Z^2}(s).$$

Ainsi F_{Z^2} est aussi continue en 0.
Comme F_{Z^2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, Z^2 est à densité.
Enfin, comme pour tout $s \neq 0$ on a :

$$F'_{Z^2}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{s}}\left(F'_Z(\sqrt{s}) + F'_Z(-\sqrt{s})\right) & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2e^{-\frac{s}{2}}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{s}} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{s^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{s}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît ainsi une loi Gamma de paramètres $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$.