Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025–2026

BCPST2 – Mathématiques

DS4- 3H00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Partie 1 – Une intégrale

Soient a et b deux entiers naturels. On définit :

$$f_{a,b} \ : \ x \mapsto x^a(1-x)^b \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x)dx.$$

Remarquons que $f_{a,b}$ est continue sur $[0,1]$ donc les intégrales de ce paragraphe ne sont pas généralisées !

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{0,n} = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \neq 0$.

Les fonctions $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto -\dfrac{(1-x)^{b+1}}{b+1}$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$ donc par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx &= \left[-\frac{x^a(1-x)^{b+1}}{b+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -a\frac{x^{a-1}(1-x)^{b+1}}{b+1}dx \\ &= 0 + \frac{a}{b+1}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1}dx \\ &= \frac{a}{b+1} I_{a-1,b+1}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(a)$ la proposition « $\forall b \in \mathbb{N},\ I_{a,b} = \dfrac{a!b!}{(a+b+1)!}$ ».

— **Initialisation :** $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après la première question.

— **Hérédité :** soit $a \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(a)$ vraie.
Soit $b \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{a+1,b} &= \frac{a+1}{b+1} I_{a,b+1} \quad \text{(question précédente)} \\ &= \frac{a+1}{b+1} \frac{a!(b+1)!}{(a+b+1+1)!} \quad \text{(HR)} \\ &= \frac{(a+1)!b!}{(a+1+b+1)!}. \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a+1,b} = \dfrac{(a+1)!b!}{(a+1+b+1)!}$.
Donc $\mathcal{P}(a+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, on a montré :

$$\forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Partie 2 – Loi Bêta et statistique d'ordre

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $g_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_{a,b}(x) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} f_{a,b}(x) \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+b+1)!}{a!b!} f_{a,b}(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Comme $f_{a,b}$ est continue et positive sur $[0,1]$, il est clair que $g_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \backslash \{0,1\}$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,b}(x)dx$ est généralisée en $-\infty$, 0, 1 et $+\infty$.

— Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g_{a,b}(x)dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g_{a,b}(x)dx$ convergent et valent 0 car $g_{a,b}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $]1,+\infty[$.

— L'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} g_{a,b}(x)dx$ n'est pas généralisée et vaut 1 d'après la partie précédente.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{a,b}(x)dx$ est convergente et vaut 1.
Donc $g_{a,b}$ est une densité de probabilité.

5. Le support de Y est inclus dans $[0,1]$ donc, par le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{1} x g_{a,b}(x)dx$ est absolument convergente.
Sur $[0,1]$, $x \mapsto x g_{a,b}(x) = \dfrac{1}{I_{a,b}} f_{a+1,b}(x)$ est positive et, d'après la partie précédente, $\displaystyle\int_{0}^{1} x g_{a,b}(x)dx$ converge donc absolument.
Ainsi Y possède bien une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 x g_{a,b}(x)dx = \frac{I_{a+1,b}}{I_{a,b}} = \frac{a+1}{a+b+2}.$$

On fixe un entier naturel $n > 0$ et on considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.
Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $X_{(k)}$ la k-ième plus petite valeur parmi les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$.
On a donc, en particulier, $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

6. Cours.

7. — Soit $F_{(1)}$ la fonction de répartition de $X_{(1)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x) = \mathbb{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n [X_i > x]) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i > x]) \quad \text{(indépendance)} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(x)) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

— Soit $F_{(n)}$ la fonction de répartition de $X_{(n)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq x) &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n [X_i \leq x]) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i \leq x]) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On admet que, comme $X_{(n)} > 0$ presque surement, la variable $Z = -\ln(X_{(n)})$ est bien définie.

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(-\ln(X_{(n)}) \leq x) = \mathbb{P}(\ln(X_{(n)}) \geq -x).$$

Or exp est la bijection réciproque de ln et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(\ln(X_{(n)}) \geq -x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \geq e^{-x}) = 1 - \mathbb{P}(X_{(n)} < e^{-x}).$$

Attention : ici on n'a pas le droit de dire $\mathbb{P}(X_{(n)} < e^{-x}) = F_{X_{(n)}}(x)$ car on n'a pas prouvé que $X_{(n)}$ est à densité.

En raisonnant comme à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{(n)} < e^{-x}) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i < e^{-x}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq e^{-x}) \quad \text{car les } X_i \text{ sont à densité} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } e^{-x} < 0 \\ e^{-nx} & \text{si } e^{-x} \in [0,1] \\ 1 & \text{si } e^{-x} > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$F_Z(x) = 1 - \begin{cases} e^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre n.

9. Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) L'événement $[X_{(k)} \leq x]$ est réalisé si et seulement si au moins k variables parmi $X_1, \ldots, X_n$ prennent une valeur inférieure ou égale à x.

(b) Pour tout $j \in [\![k, n]\!]$, on note $\mathcal{A}_j$ l'événement « exactement j variables parmi $X_1, \ldots, X_n$ prennent une valeur inférieure ou égale à x ».

Le point **(a)** ce traduit alors par : $[X_{(k)} \leq x] = \displaystyle\bigcup_{j=k}^{n} \mathcal{A}_j$.

Alors : $\mathbb{P}(X_{(k)} \leq x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(\mathcal{A}_j)$.

(c) Soit $j \in [\![k, n]\!]$. On va déterminer $\mathbb{P}(\mathcal{A}_j)$.

On note $\mathcal{P}_j$ l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ à j éléments ; son cardinal est alors $\displaystyle\binom{n}{j}$.

Pour tout $I \in \mathcal{P}_j$, on note $A_I = (\cap_{i \in I}[X_i \leq x]) \cap \left(\cap_{i \in [\![1,n]\!] \setminus I}[X_i > x]\right)$.

Alors :

$$\mathcal{A}_j = \bigcup_{I \in \mathcal{P}_j} A_I$$

et comme les événements $(A_I)_{I \in \mathcal{P}_k}$ sont deux à deux disjoints :

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_j) = \sum_{I \in \mathcal{P}_j} \mathbb{P}(A_I).$$

Or par indépendance des variables, pour tout $I \in \mathcal{P}_j$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_I) = \mathbb{P}((\cap_{i \in I}[X_i \leq x]) \cap \left(\cap_{i \in [\![1,n]\!] \setminus I}[X_i > x]\right)) &= \prod_{i \in I} P(X_i \leq x) \prod_{i \notin I} P(X_i > x) \\
&= \prod_{i \in I} F(x) \prod_{i \notin I} (1 - F(x)) \\
&= F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{A}_j) = \sum_{I\in\mathcal{P}_j} \mathbb{P}(A_I) = \mathbb{P}(\mathcal{A}_j) &= \sum_{I\in\mathcal{P}_j} F(x)^j(1-F(x))^{n-j} \\ &= F(x)^j(1-F(x))^{n-j}\sum_{I\in\mathcal{P}_j} 1 \\ &= \binom{n}{j} F(x)^j(1-F(x))^{n-j}\end{aligned}$$

(d) Avec **(b)** et **(c)** on obtient :

$$\mathbb{P}(X_{(k)} \leq x) = \sum_{j=k}^{n} \mathbb{P}(\mathcal{A}_j) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j(1-F(x))^{n-j}.$$

10. Avec la question précédente et comme F est la fonction de répartition d'une variable de loi $\mathcal{U}([0,1])$ on a :

$$F_{X_{(k)}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^j(1-x)^{n-j} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

En particulier, $F_{X_{(k)}}$ est polynomiale sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.
Elle est donc aussi continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.
De plus :

$$\lim_{x\to 0^-} F_{X_{(k)}}(x) = \lim_{x\to 0^+} F_{X_{(k)}}(x) = 0 = F_{X_{(k)}}(0)$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} F_{X_{(k)}}(x) = \lim_{x\to 1^+} F_{X_{(k)}}(x) = 1 = F_{X_{(k)}}(1)$$

donc $F_{X_{(k)}}$ est aussi continue en 0 et en 1.
Ainsi $F_{X_{(k)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ donc $X_{(k)}$ est à densité.
Pour tout $x \in \backslash\{0,1\}$, on a :

$$F'_{X_{(k)}}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (jx^{j-1}(1-x)^{n-j} - (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1}) & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon }. \end{cases}$$

et donc la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (jx^{j-1}(1-x)^{n-j} - (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1}) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon }. \end{cases}$$

est une densité de $X_{(k)}$.

11. **(a)** Soit $x \in]0,1[$. En reprenant la formule trouvée à la question précédente on a :

$$
\begin{aligned}
F'_{X_{(k)}}(x) &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(jx^{j-1}(1-x)^{n-j} - (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1} \right) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} jx^{j-1}(1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1} \\
&= \binom{n}{k} kx^{k-1}(1-x)^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} jx^{j-1}(1-x)^{n-j} \\
&\quad - \sum_{j=k}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1}
\end{aligned}
$$

en extrayant le premier terme de la première somme et le dernier (qui est nul) de la seconde.
On effectue en suite le changement de variable $i = j+1$ dans la seconde somme :

$$
\sum_{j=k}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j)x^j(1-x)^{n-j-1} = \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i-1} (n-i+1)x^j(1-x)^{n-i}.
$$

On obtient donc :

$$
\begin{aligned}
F'_{X_{(k)}}(x) = \binom{n}{k} kx^{k-1}(1-x)^{n-k} &+ \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} jx^{j-1}(1-x)^{n-j} \\
- \sum_{i=k+1}^{n} \binom{n}{i-1} &(n-i+1)x^j(1-x)^{n-i} \\
= k\binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k} &+ \sum_{j=k+1}^{n} \left(j\binom{n}{j} - (n-j+1)\binom{n}{j-1} \right) x^{j-1}(1-x)^{n-j}.
\end{aligned}
$$

(b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

$$
\begin{aligned}
j\binom{n}{j} = j\frac{n!}{j!(n-j)!} &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \\
&= \frac{n-j+1}{n-j+1} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \\
&= (n-j+1)\frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} \\
&= (n-j+1)\binom{n}{j-1}.
\end{aligned}
$$

(c) Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$, on a par les deux questions précédentes :

$$
F'_{X_{(k)}}(x) = k\binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = g_{k-1,n-k}(x).
$$

En particulier, la densité de $X_{(k)}$ trouvée à la question 10 est exactement $g_{k-1,n-k}$.
Ainsi $X_{(k)}$ suit la loi Bêta de paramètres $(k-1, n-k)$ et d'après la question 5, elle possède une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(X_{(k)}) = \frac{k}{n+1}.$$

Exercice 2

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J.$$

1. (a) Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors en notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(M + \lambda N) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}\right) &= a + \lambda a' + d + \lambda d' \\ &= a + b + \lambda(a' + d') \\ &= \mathrm{Tr}(M) + \lambda \mathrm{Tr}(N). \end{aligned}$$

Ainsi l'application Tr est linéaire.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \ker(\mathrm{Tr}) &\iff a + d = 0 \\ &\iff a = -d \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\ker(\mathrm{Tr})$.
Soit $(d, b, c) \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$\begin{aligned} d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff d = b = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est aussi libre ;
C'est donc une base du noyau et on a bien $\dim(\ker(\mathrm{Tr})) = 3$.

2. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= M + \lambda N + \mathrm{Tr}(M + \lambda N)J \\ &= M + \lambda N + (\mathrm{Tr}(M) + \lambda \mathrm{Tr}(N))J \quad \text{d'après 1} \\ &= M + \mathrm{Tr}(M)J + \lambda(N + \mathrm{Tr}(N)J) \\ &= f(M) + \lambda f(N). \end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in E_1 \iff f(M) = M &\iff M + \mathrm{Tr}(M)J = M \\ &\iff \mathrm{Tr}(M)J = 0_4 \\ &\iff \mathrm{Tr}(M) = 0 \quad \text{car } J \neq 0_4 \\ &\iff M \in \ker(\mathrm{Tr}). \end{aligned}$$

Ainsi $E_1 = \ker(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ en est une base d'après **1.(b)**.

4. On a : $f(J) = (1 + \mathrm{Tr}(J))J$.

5. On considère dans cette question le cas où Tr(J) $\neq 0$.

(a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4)$.

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 J = 0_2 \\ &\implies \lambda_4 J = -\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \lambda_4 \mathrm{Tr}(J) = -\lambda_1 \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) - \lambda_2 \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) - \lambda_3 \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \\ &\implies \lambda_4 = 0 \quad \text{car } \mathrm{Tr}(J) \neq 0. \end{aligned}$$

Puis, comme la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre on obtient :

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 J = 0_2 \\ &\implies \lambda_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0_2 \\ &\implies \lambda_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus elle contient 4 éléments et la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4. Donc c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad f(J) = (1 + \mathrm{Tr}(J))J.$$

Donc dans la base $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J\right)$:

- $f\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(1,0,0,0)$;
- $f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(0,1,0,0)$;
- $f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(0,0,1,0)$;
- $f(J)$ a pour coordonnées $(0,0,0,1+\mathrm{Tr}(J))$.

La matrice de f dans la base $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, J\right)$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{Tr}(J)\end{pmatrix}.$$

(c) L'application linéaire f est bijective si et seulement si B est inversible.

Or B est une matrice diagonale donc elle est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Donc finalement, f est bijective si et seulement si $\mathrm{Tr}(J) \neq -1$.

6. On considère désormais le cas où $\mathrm{Tr}(J) = 0$. Soit $M \in \ker(f)$.

(a) Par définition du noyau on a :

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J = 0_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad M = -\mathrm{Tr}(M)J.$$

En appliquant la fonction trace qui est linéaire on déduit de cette égalité :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(-\mathrm{Tr}(M)J) = -\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(J) = 0.$$

(b) Donc $M = -\mathrm{Tr}(M)J$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Par conséquent M est la matrice nulle.

(c) La question précédente montre que $\ker(f) = \{0_2\}$ c'est-à-dire que f est injective.

Or f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie donc d'après une conséquence du théorème du rang, cela entraîne qu'il est bijectif.

7. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

(a) On a :

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) On a bien :

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_4.$$

(c) On sait que :

$$A^2 - 2A + I_4 = (A - I_4)^2 = 0_4$$

donc

$$A(2I_4 - A) = I_4.$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = 2I_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.