Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025–2026

BCPST2 – Mathématiques

DS5- 2H00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Partie 1 – Une intégrale

Soient a et b deux entiers naturels. On définit :

$$f_{a,b}\ :\ x \mapsto x^a(1-x)^b \quad \text{et} \quad I_{a,b} = \int_0^1 f_{a,b}(x)dx.$$

1. Calculer $I_{0,n}$ pour tout entier naturel n.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \neq 0$. Trouver une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a-1,b+1}$.
3. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad I_{a,b} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

   Une rédaction très soigneuse est attendue.

Partie 2 – Loi Bêta et statistique d'ordre

4. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $g_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_{a,b}(x) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} f_{a,b}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+b+1)!}{a!b!} f_{a,b}(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Monter que $g_{a,b}$ est une densité de probabilité.
5. Soit Y une variable aléatoire à densité de densité $g_{a,b}$: on dit que Y suit la loi Bêta de paramètres a et b.
   Montrer que Y possède une espérance et déterminer sa valeur.

On fixe un entier naturel $n > 0$ et on considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur le segment $[0, 1]$.
Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $X_{(k)}$ la k-ième plus petite valeur parmi les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.
On a donc, en particulier, $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

6. Donner la fonction de répartition de X_1, son espérance et sa variance.

7. Déterminer les fonctions de répartition de $X_{(1)}$ et $X_{(n)}$.

On admet que, comme $X_{(n)} > 0$ presque surement, la variable $Z = -\ln(X_{(n)})$ est bien définie.

8. Déterminer la fonction de répartition de Z et reconnaître sa loi.

9. $(*)$ On note F la fonction de répartition de X_1.
Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}.$$

$(*)$ *Question dure qui peut être admise pour la suite. Objectif ENS : à chercher chez vous.*

10. Déduire que $X_{(k)}$ est à densité et donner une densité de $X_{(k)}$ sous forme de somme.

11. **(a)** Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$F'_{X_{(k)}}(x) = k\binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} \left(j\binom{n}{j} - (n-j+1)\binom{n}{j-1} \right) x^{j-1}(1-x)^{n-j}.$$

(b) Montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $j\binom{n}{j} = (n-j+1)\binom{n}{j-1}$.

(c) En déduire la loi de $X_{(k)}$ (on précisera les paramètres) ainsi que son espérance.

Exercice 2

On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la famille

$$\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **trace** de M le réel noté $\mathrm{Tr}(M)$ défini par :

$$\mathrm{Tr}(M) = a + d.$$

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J.$$

1. **(a)** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \mathrm{Tr}(M) \end{aligned}$$

est linéaire.

(b) Déterminer une base de son noyau et vérifier : $\dim(\ker(\mathrm{Tr})) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Montrer que

$$E_1 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = M\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer une base $\mathcal{B}$ de E_1.

4. Calculer $f(J)$.

5. On considère dans cette question le cas où $\mathrm{Tr(J)} \neq 0$.

(a) Montrer que la famille formée des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ et de J est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer la matrice de f dans la base de la question précédente.

(c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Tr}(J)$ pour que f soit bijectif.

6. On considère maintenant le cas où $\mathrm{Tr(J)} = 0$. Soit $M \in \ker(f)$.

(a) Montrer que $M \in \mathrm{Vect}(J)$ puis que $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

(b) En déduire que M est la matrice nulle.

(c) Conclure que f est bijective.

7. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathcal{B}_c$.

(b) Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0_4$.

(c) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.