Chapitre 10

Applications linéaires

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

10.1 Applications linéaires

10.1.1 Linéarité

Définition 10.1 (Application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application de E dans F.

— On dit que f est **linéaire** si :

$$\forall (u, v) \in E^2 \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

— Une application linéaire de E dans E est appelé un **endomorphisme** de E.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

— Une application linéaire bijective est appelée un **isomorphisme**.
Un endomorphisme bijective est appelé un **automorphisme**.

Proposition 10.1

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application de E dans F.

1. (Caractérisation des applications linéaires) f est linéaire si et seulement si pour tout $(u, v) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$f(u + \lambda \cdot v) = f(u) + \lambda \cdot f(v).$$

2. Si f est linéaire alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de E et tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ on a : $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.
3. Si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.

Proposition 10.2 (Opérations sur les applications linéaires)

Soient E,F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et $h\mathcal{L}(F,G)$.

1. Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est linéaire.
2. La composée $h \circ f$ est linéaire.
3. Si f est bijective alors f^{-1} est linéaire.

Remarque 10.1. Le premier point signifie que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Définition 10.2 (Puissance d'un endomorphisme)

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit les puissances de f par récurrence par

$$\begin{cases} f^0 = id_E \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

10.1.2 Noyau

Définition 10.3 (Noyau d'une application linéaire)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **noyau** de f et on note $\ker(f)$, l'ensemble :

$$\ker(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}.$$

Remarque 10.2. D'après la proposition **??**, on a toujours $0_E \in \ker(f)$.

Proposition 10.3

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
2. f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

10.1.3 Image

Définition 10.4 (Image d'une application linéaire)

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u),\ u \in E\} = \{v \in F \mid \exists u \in E,\ f(u) = v\}.$$

Proposition 10.4

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

1. l'image de f est un sous-espace vectoriel de F,
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

10.2 Application linéaire en dimension finie

10.2.1 Application linéaire et base

Proposition 10.5

Soient E, F $\mathbb{K}$-deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie et soit $\mathcal{B}$ une famille génératrice de E. Alors

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((f(e))_{e\in\mathcal{B}}).$$

Définition 10.5 (Rang d'une application linéaire)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et on appelle **rang** de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Remarque 10.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

— La propriété précédente implique que $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$.

— Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F, si F est de dimension finie, alors $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité si et seulement si f est surjective.

Proposition 10.6

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Il y a équivalence entre :

— f est un isomorphisme,

— il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ est une base de F,

— pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $f(\mathcal{B})$ est une base de F.

Proposition 10.7 (Principe de détermination sur une base)

Soient E, F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad f(e_i) = f_i.$$

10.2.2 Théorème du rang

Théorème 10.1 (Théorème du rang)

Soient E, F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors
$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f).$$
Autrement dit
$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)).$$

Corollaire 1

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si $\dim(E) < \dim(F)$ alors f n'est pas surjective.
2. Si $\dim(E) > \dim(F)$ alors f n'est pas injective.

En particulier, si $\dim(E) \neq \dim(F)$, il n'existe pas d'isomorphisme entre E et F.

Corollaire 2

Soient E, F deux espaces vectoriels de **même** dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors
$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Remarque 10.4. En particulier, si f est un **endomorphisme** d'un espace vectoriel E de dimension finie on a donc
$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

10.3 Matrices et applications linéaires

10.3.1 Matrices représentatives d'une application linéaire

Définition 10.6 (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $\mathcal{B}$ une base de E.

1. Soit $u \in E$ et notons $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. On appelle **matrice de** u **dans la base** $\mathcal{B}$ et on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
2. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E. On appelle **matrice de** $(u_1, \dots, u_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$ et on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est la $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$.

Définition 10.7 (Matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On note $p \in \mathbb{N}^*$ la dimension de E et $n \in \mathbb{N}^*$ la dimension de F et on considère $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ définie par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)).$$

Il s'agit d'une matrice de taille $n \times p$.
Pour un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ on notera $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ pour désigner $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(f)$.

Proposition 10.8

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On considère $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_1 + \lambda f_2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_1) + \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f_2)$.
2. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$.
3. f est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ est inversible. Dans ce cas :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\right)^{-1}.$$

Corollaire 3

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F) \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2.$$

10.3.2 Lien entre applications linéaires et matrices associées

Proposition 10.9

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Corollaire 4 (Coordonnées de l'image d'un vecteur)

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $u \in E$.
Si les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_E$ sont $(x_1, \ldots, x_p)$ alors les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ sont données par le vecteur colonne $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
En particulier, pour tout $v \in F$ on a :

$$v \in \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)).$$

Corollaire 5

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On considère $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $u \in E$.
Alors $u \in \ker(f)$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) = 0$.

Proposition 10.10 (Rang)

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On considère $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F.
On a :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)\right).$$

10.3.3 Changement de base

Définition 10.8 (Matrice de passage)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.
Ainsi, si $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ on a :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n).$$

Remarque 10.5. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de id_E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id_E}).$$

Attention à l'ordre des bases !

Proposition 10.11

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
La matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$:

$$\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Proposition 10.12 (Formules de changement de base)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ des base de E.

1. Soit $u \in E$.
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u).$$
Autrement dit, la multiplication à gauche par la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ permet de déterminer les coordonnées de u dans "l'ancienne" base $\mathcal{B}$ à partir de ses coordonnées dans la "nouvelle" base $\mathcal{B}'$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Définition 10.9 (Matrices semblables)

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

Proposition 10.13

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme (dans des bases éventuellement différentes).