

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles.

Un ensemble sera dit **au plus dénombrable** s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. En particulier, un ensemble fini est au plus dénombrable.

11.1 Variables aléatoires discrètes

11.1.1 Variables aléatoires discrètes, loi.

Définition 11.1 (Variable aléatoire réelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelée une **variable aléatoire discrète** si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable. Cela revient à dire qu'on peut écrire

$$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$$

où I est une partie de $\mathbb{N}$.

Remarque 11.1. On distingue deux types de variables aléatoires discrètes :

- les **variables aléatoires discrètes à support fini** lorsque $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ (où $n \in \mathbb{N}$),
- les **variables aléatoires discrètes à support infini** lorsque $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où I est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Définition 11.2 (Loi d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi** de X la donnée de

- $X(\Omega)$;
- pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x)$.

Proposition 11.1 (Loi et fonction de répartition)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont on note F_X la fonction de répartition.

1. On suppose que $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n\}$ avec $x_0 < \dots < x_n$. Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

2. On suppose que $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ avec $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ croissante. Alors :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

Proposition 11.2 (Importante pour le chapitre suivant)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors la famille $([X = x]_{x \in X(\Omega)})$ est un système complet d'événements.

Proposition 11.3 (Existence de variables aléatoires discrètes)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et I une partie de $\mathbb{N}$.

Soit $(p_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}$ deux familles de réels tels que :

1. $\forall i \in I, \quad p_i \in [0, 1];$
2. $\sum_{i \in I} p_i$ converge et sa somme vaut 1.

Alors il existe une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que

1. $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$
2. $\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$

Remarque 11.2. Dans l'énoncé précédent, lorsque I est fini, la convergence est automatique (il s'agit d'une somme finie).

Lorsque I est infini, $\sum_{i \in I} p_i$ est une série dont il faut étudier la convergence puis calculer la somme (qui doit valoir 1).

Proposition 11.4

Soit X une **variable aléatoire discrète** définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$. La variable aléatoire $g(X)$ est discrète et sa loi est donnée par

1. $g(X)(\Omega) = \{g(x), x \in X(\Omega)\},$
2. pour tout $y \in g(X)(\Omega)$ on a

$$\mathbb{P}(g(X) = y) = \sum_{x \in X(\Omega) \text{ tel que } g(x)=y} \mathbb{P}(X = x).$$

11.1.2 Indépendance

Définition 11.3

Toutes les variables aléatoires suivantes sont réelles discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On dit que X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

2. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

3. On dit que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes si toute sous famille finie de $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est mutuellement indépendante au sens du point précédent.

11.2 Moments d'une variable aléatoire discrète

11.2.1 Espérance

Définition 11.4 (Espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Si X est discrète à support fini, on appelle **espérance** de X et on note $\mathbb{E}(X)$, le nombre défini par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

- Si X est discrète à support infini, on dit que X **admet une espérance** si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'**espérance** de X , notée $\mathbb{E}(X)$ est la somme de cette série :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Remarque 11.3.

1. Une variable aléatoire discrète **à support fini** possède donc toujours une espérance.
2. Une variable aléatoire discrète **à support infini** ne possède pas nécessairement une espérance : l'hypothèse de convergence absolue est fondamentale.

Proposition 11.5

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant une espérance.

1. *Linéarité* : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + bY$ possède une espérance et $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
2. *Positivité* : si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
3. *Croissance* : si $X \geq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.
4. Si de plus X et Y sont indépendantes alors XY possède une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Théorème 11.1 (Transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si et seulement si la série

$\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x)$ est absolument convergente. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Remarque 11.4. Si X est à support fini alors $g(X)$ possède toujours une espérance.

11.2.2 Variance

Définition 11.5 (Moments d'ordre r)

Soient $r \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire discrète. On dit que X possède un **moment d'ordre r** si X^r possède une espérance. On note alors

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

Remarque 11.5. Si X est à support fini alors X possède des moments de tout ordre.

Définition 11.6 (Variance)

Soit X une variable aléatoire discrète possédant un moment d'ordre 2. Alors

- X possède une espérance
- $(X - \mathbb{E}(X))^2$ possède une espérance appelée la **variance** de X , notée $\mathbb{V}(X)$:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Proposition 11.6 (Formule de Koenig-Huygens)

Une variable aléatoire discrète X possède une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2. Dans ce cas :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 11.7

Soit X une variable aléatoire discrète possédant une variance. Alors :

1. $\mathbb{V}(X) \geq 0$,
2. pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(aX + b)$ existe et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Proposition 11.8

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes et possédant une variance. Alors $\sum_{k=1}^n X_k$ possède une variance et

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k).$$

11.2.3 Inégalités

Proposition 11.9 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive et possédant une espérance. Alors :

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Théorème 11.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

11.3 Lois usuelles

11.3.1 Lois usuelles finies

Loi certaine

1. On dit que X suit la loi certaine si elle ne prend qu'une seule valeur $a \in \mathbb{R}$:

$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = a) = 1.$$

2. Si X suit une loi certaine avec $X(\Omega) = \{a\}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$

3. Une variable aléatoire X suit une loi certaine si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.

Lois de Bernoulli

Soit $p \in]0, 1[$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :

- i) $X(\Omega) = \{0, 1\}$

- ii) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Expérience de référence. On considère une expérience aléatoire possédant deux issues :

- une issue nommée « succès » qui se produit avec probabilité p ;
- l'autre nommée « échec » qui produit avec probabilité $1 - p$

(une telle expérience est appelée une épreuve de Bernoulli).

La variable aléatoire X égale à 1 en cas de succès et à 0 en cas d'échec suit une loi $\mathcal{B}(p)$.

Exemple 11.1 (Fonction indicatrice). Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement. On note 1_A la variable aléatoire définie par :

$$1_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

Lois binomiales

Soient $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Binomiale de paramètres n et p , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si :

- i) $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

- ii) $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Expérience de référence. On considère une expérience aléatoire qui consiste à répéter n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Lois uniformes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ si :

- i) $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$

- ii) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Expérience de référence On considère une expérience aléatoire qui possède n issues différentes numérotées de 1 à n qui sont équiprobables.

La variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue suit une loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Remarque 11.6. Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a < b$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ si :

- i) $X(\Omega) = \llbracket a, b \rrbracket$

- ii) $\forall k \in \llbracket a, b \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+1)}{12}.$$

11.3.2 Lois usuelles discrètes infinies

Lois géométriques

Soit $p \in]0, 1[$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de géométrique de paramètre p , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :

- i) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

- ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

3. **Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p .

La variable aléatoire X donnant le rang du premier succès obtenu suit une loi $\mathcal{G}(p)$.

Exemple 11.2 (Simulation d'une loi géométrique). Pour rappel (cf TP3) la fonction `rd.rand()` de la bibliothèque `random.numpy` tire un nombre aléatoire de $[0, 1[$ selon la loi :

$$\mathbb{P}(\text{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I)$$

pour tout intervalle $I \subset [0, 1[$.

```

1 def simule_geo(p):
2     succes = 0 # 0 pour un échec , 1 pour un succes
3     nb_essais = 0
4     while succes == 0:
5         if rd.rand() < p:
6             succes = 1
7             nb_essais += 1
8     return nb_essais

```


Proposition 11.10 (Absence de mémoire)

Soit $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. Alors, pour tout $(s, t) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a :

$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$

Lois de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :

- i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$

- ii) $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$