

Mathématiques – TD12

COUPLES DE VARIABLES DISCRÈTES

Exercice 1. On lance deux dés à quatre faces numérotées de 1 à 4, l'un bleu, l'autre rouge. On suppose les dés équilibrés et les lancers indépendants. On suppose que l'expérience peut être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note X la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et Y celle donnant la somme des valeurs des deux dés.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de Y .
3. Déterminer la loi de X sachant $[Y = 5]$.

Exercice 2. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $0 < p < 1$. On suppose que

- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètre (n, p) .

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .
3. Déterminer, pour $m \in \mathbb{N}$, la loi de X sachant $(Y = m)$. Comment qualifier la loi de $X - m$ conditionnelle à $(Y = m)$?

Exercice 3. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce ayant la probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir Pile et la probabilité $1 - p$ d'obtenir Face.

Le joueur A commence et s'arrête dès il obtient un Pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués. Le joueur B effectue alors le même nombre de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus par le joueur B .

1. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
2. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
3. Montrer que $P([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{1-p}{2-p}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} (1-p)^{2k-n-1}$.

Exercice 4. On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$ ($0 < p < 1$). Pour tout entier $k > 0$, on note P_k l'événement « la pièce donne Pile au k -ième lancer » et F_k l'événement « la pièce donne Face au k -ième lancer ». On note X le rang du premier Pile et Y le rang du deuxième Pile.

1. Reconnaître, sans calcul, la loi de X .

2. Déterminer la loi de (X, Y) .
3. En déduire la loi de Y .
4. Déterminer la loi de $Y - X$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 5. Soient p_1, p_2, p_3 des réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $D_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}$ et on pose :

$$\forall (i, j) \in D_n, \quad p(i, j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}.$$

1. Pour quelles valeurs de p_1, p_2, p_3 définit-on ainsi la loi conjointe d'un couple de variables (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y ainsi que leur espérance et variance.

Exercice 6. Le jour du premier de l'an, le nombre de personnes N hospitalisées pour section des veines du poignet suite à ouverture d'huîtres suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100$. Les constatations des praticiens sur 100 ans indiquent que, sachant qu'il y a $N = n$ victimes, le nombre F de femmes victimes suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0.25$. On note H le nombre d'hommes.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de H sachant $(N = n)$.
2. Déterminer les lois de H et F , donner leurs espérances et leurs variances.
3. H et F sont-elles indépendantes ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait autant d'hommes que de femmes ? Donner le résultat sous forme d'une somme.

Exercice 7. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$. Montrer que

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \dots + k_n, p).$$

2. On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$. Montrer que

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Exercice 8. Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}.$$

1. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y .
2. Soit U une variable de Bernoulli telle que $P(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes et on note $T = (2U - 1)Y$.
 - (a) Justifier T est une variable aléatoire discrète et déterminer sa loi.
 - (b) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.
 - (c) Vérifier que $T^2 = Y^2$. En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$.

Exercice 9. On fait deux biopsies à un patient. Dans la première n cellules sont étudiées et on désigne par X le nombre de cellules malignes. Dans la seconde, m cellules sont prélevées et on note Y le nombre de cellules malignes.

La probabilité qu'une cellule soit maligne est notée p .

1. Par quelle loi peut-on modéliser les variables X et Y ?
2. Que représente $X + Y$? Déterminer sa loi.
3. Le laborantin a mélangé par inadvertance les deux éprouvettes. Quelle est alors la loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = k]$ avec $k \in \llbracket 0, m + n \rrbracket$?

Exercice 10. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variables aléatoires réelles indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p .

1. (a) Déterminer la loi de $G_1 + G_2$. Possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
 (b) Déterminer la loi de $G_1 - G_2$. Possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
 (c) Les variables $G_1 + G_2$ et $G_1 - G_2$ sont-elles indépendantes ?
 (d) Déterminer la covariance de $(G_1 + G_2, G_1 - G_2)$.
2. (a) Déterminer la loi de $I = \min(G_1, G_2)$ et $S = \max(G_1, G_2)$.
 (b) Possèdent-elles une espérance ? Si oui, les calculer.
 (c) Déterminer la variance de I .
 (d) Déterminer la covariance de (I, S) et en déduire la variance de S .
3. Déterminer, si elle existe, l'espérance de $|G_1 - G_2|$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est p et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à p . On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs.

1. Déterminer les lois de A et B .
2. Les variables A et B sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la covariance de A et B .

Exercice 12. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i .
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.
 (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
 (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) .