

Mathématiques – TD12**COUPLES DE VARIABLES DISCRÈTES****Correction de l'exercice 1.**

1. On a $X(\Omega) = \llbracket 1, 4 \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 2, 8 \rrbracket$.

On note aussi Z la variable aléatoire donnant la valeur du dé rouge de sorte que $X + Z = Y$.

Alors par indépendance des deux dés :

$$P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1, Z = 1) = P(X = 1)P(Z = 1) = \frac{1}{16}.$$

De même on obtient :

$i \in X(\Omega) \backslash j \in Y(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	0
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événements $([X = i])_{i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket}$ on a :

$$\forall j \in \llbracket 2, 8 \rrbracket, \quad P(Y = j) = \sum_{i=1}^4 P(X = i, Y = j).$$

Ainsi :

$j \in Y(\Omega)$	2	3	4	5	6	7	8
$P(Y = j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

3. Pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ on a :

$$P_{[Y=5]}(X = i) = \frac{P(X = i, Y = 5)}{P(Y = 5)} = 4 \times P(X = i, Y = 5).$$

Ainsi :

$i \in X(\Omega)$	1	2	3	4
$P_{[Y=5]}(X = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Correction de l'exercice 2. On sait que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{et} \quad P_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$$

1. Soit $(k, i) \in \mathbb{N}^2$. Alors :

$$P(X = k, Y = i) = P(X = k)P_{[X=k]}(Y = i) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k. \end{cases}$$

2. La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P([Y = i]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{P_{[X=k]}([Y = i])}_{=0 \text{ si } i > k} P([X = k]) \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} P_{[X=k]}([Y = i]) P([X = k]) \\ &= \sum_{k=i}^{+\infty} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^i p^i}{i!} \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-i} (1-p)^{k-i}}{(k-i)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^i p^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j (1-p)^j}{j!} \end{aligned}$$

où on obtient la dernière ligne en faisant le changement de variable $j = k - i$. On reconnaît la somme d'une série exponentielle :

$$P([Y = i]) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i p^i}{i!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}.$$

Donc Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[Y=m]}(X = n) &= \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{1}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} \lambda^n e^{\lambda p} \lambda^{-m} p^{-m} m! & \text{si } n \geq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} e^{-(1-p)\lambda} \frac{1}{(n-m)!} (1-p)^{n-m} \lambda^{n-m} & \text{si } m \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et donc la loi de $X - m$ conditionnelle à $(Y = m)$ est une loi $\mathcal{P}(-(1-p)\lambda)$.

Correction de l'exercice 3.

1. L'expérience est une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p . La variable aléatoire X donne le rang du premier succès donc X suit la loi géométrique de paramètre p .

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'événement $[X = k]$ est réalisé, le joueur B fait k lancers et Y compte le nombre de succès de cette répétition de k épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p . Ainsi la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi binomiale de paramètres k et p .

2. Pour tout $k \geq 1$, lorsque $[X = k]$ est réalisé, Y peut prendre toutes les valeurs de $\llbracket 0, k \rrbracket$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
3. La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned}
 P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = 0)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k}{0} p^0 (1-p)^k p (1-p)^{k-1} \\
 &= p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1} \\
 &= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} \quad \text{car } (1-p)^2 \neq 1, \\
 &= \frac{p(1-p)}{2p-p^2} \\
 &= \frac{1-p}{2-p}.
 \end{aligned}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De même qu'à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 P(Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = n)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = n)P(X = k)
 \end{aligned}$$

car $P_{[X=k]}(Y = n) = 0$ si $k < n$. D'où :

$$\begin{aligned}
 P(Y = n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} P_{[X=k]}(Y = n)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} p (1-p)^{k-1} \\
 &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} (1-p)^{2k-n-1}.
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4.

1. L'expérience est une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p . La variable aléatoire X donne le rang du premier succès donc X suit la loi géométrique de paramètre p .
2. On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$. Soit $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
 - Si $j \leq i$ alors $P(X = i, Y = j) = 0$ car le deuxième Pile arrive nécessairement après le premier.

- Si $i < j$ alors l'événement $[X = i, Y = j]$ est réalisé si et seulement si les $i - 1$ premiers lancers sont des Faces, le i -ième est un Pile, les $j - i - 1$ suivants sont des Faces et le j -ième un Pile. Ainsi par indépendance des lancers :

$$P(X = i, Y = j) = (1 - p)^{i-1} p (1 - p)^{j-i-1} p = p^2 (1 - p)^{j-2}.$$

3. La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complets d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc, pour tout $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} p^2 (1 - p)^{j-2} \\ &= (j - 1) p^2 (1 - p)^{j-2}. \end{aligned}$$

4. Comme $Y > X$ on a $(Y - X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. La famille $([X = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complets d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc, pour tout $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} P(Y - X = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y - X = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y = i + j) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} p^2 (1 - p)^{i+j-2} \\ &= p^2 (1 - p)^{j-1} \sum_{i=1}^{+\infty} (1 - p)^{i-1} \\ &= p^2 (1 - p)^{j-1} \frac{1}{p} \\ &= p (1 - p)^{j-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $Y - X$ suit la loi géométrique de paramètre p .

Les lancers étant indépendants, après l'obtention du premier Pile, on peut considérer les lancers suivants comme une nouvelle séquence d'épreuves de Bernoulli et la variable $Y - X$ donne alors le rang du premier succès. D'où le fait que $Y - X$ suive une loi géométrique.

Correction de l'exercice 5.

1. Il s'agit de déterminer les valeurs de p_1, p_2, p_3 pour lesquelles la somme (finie)

$$\sum_{(i,j) \in D_n} p(i, j) = 1.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{(i,j) \in D_n} p(i,j) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{j!(n-i-j)!} p_2^j p_3^{n-i-j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} p_2^j p_3^{n-i-j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} p_1^i (p_2 + p_3)^{n-i} \quad (\text{binôme de Newton}) \\
 &= (p_1 + p_2 + p_3)^n \quad (\text{binôme de Newton}).
 \end{aligned}$$

Ainsi cette somme vaut 1 si et seulement si $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

2. On a $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket = Y(\Omega)$. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=0}^{n-i} f(i,j) = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} \\
 &= \frac{n!}{i!} p_1^i \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!(n-i-j)!} p_2^j p_3^{n-i-j} \\
 &= \frac{n!}{i!(n-i)!} p_1^i \sum_{j=0}^n \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} p_2^j p_3^{n-i-j} \\
 &= \binom{n}{i} p_1^i (p_2 + p_3)^{n-i} \\
 &= \binom{n}{i} p_1^i (1 - p_1)^{n-i}
 \end{aligned}$$

car $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Ainsi X suit la loi $\mathcal{B}(n, p_1)$ et de même Y suit la loi $\mathcal{B}(n, p_2)$.

Correction de l'exercice 6. Posons N le nombre de victimes, $N = H + F$. On pose $q = 1 - p$.

1. Les variables aléatoires N , H et F sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $N = n$ (notons que $\mathbb{P}(N = n) > 0$), pour $k \in \mathbb{N}$, on a l'égalité d'événements

$$[N = n] \cap [H = k] = [N = n] \cap [F = n - k].$$

- Si $k > n$, le membre de droite est l'événement impossible, sa probabilité est nulle et

$$\mathbb{P}_{[N=n]}(H = k) = \frac{\mathbb{P}(H = k \cap N = n)}{\mathbb{P}(N = n)} = 0.$$

- Si $k \leq n$, en utilisant la connaissance de la loi conditionnelle de F sachant $N = n$, (on sait donc que pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}_{[N=n]}(F = \ell) = \binom{n}{\ell} p^\ell q^{n-\ell}$)

puis la symétrie des coefficients binomiaux, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[N=n]}(H = k) &= \frac{\mathbb{P}(H = k \cap N = n)}{\mathbb{P}(N = n)} = \frac{\mathbb{P}(F = n - k \cap N = n)}{\mathbb{P}(N = n)} \\ &= \mathbb{P}_{[N=n]}(F = n - k) \\ &= \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^k \\ &= \binom{n}{k} p^{n-k} q^k.\end{aligned}$$

On a donc obtenu que, sachant $[N = n]$, la loi de H est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$.

2. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $(\mathbb{P}(N = n))_{n \in \mathbb{N}}$ (c'est-à-dire en « conditionnant sur les valeurs possibles de N »), pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[N=n]}(F = k) \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} (p\lambda)^k \frac{1}{k!} e^{\lambda q}\end{aligned}$$

La v.a F suit donc une loi $\mathcal{P}(\lambda p)$ et symétriquement H suit une loi de Poisson de paramètre λq .

3. Pour $k, \ell \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([F = k] \cap [H = \ell]) &= \mathbb{P}([F = k] \cap [N = k + \ell]) = \mathbb{P}_{[N=k+\ell]}(F = k) \mathbb{P}(N = k + \ell) \\ &= \binom{k+\ell}{k} p^k q^\ell \lambda^{k+\ell} \frac{1}{(k+\ell)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} \\ &= \mathbb{P}(F = k) \mathbb{P}(H = \ell).\end{aligned}$$

Les variables H et F se révèlent donc indépendantes (il faut noter que le plus souvent, dans les problèmes, l'indépendance est une hypothèse de modélisation, dans le cas présent, l'indépendance est *conséquence* d'autres hypothèses, ici la présence de lois conditionnelles binomiales qui cachent donc une indépendance).

4. Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $(\mathbb{P}(H = \ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ (c'est-à-dire en « conditionnant sur les valeurs possibles de H »)

$$\mathbb{P}(H = F) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 pq)^\ell}{(\ell!)^2}$$

Correction de l'exercice 7. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. On procède par récurrence. Soit, pour tout entier $n \geq 2$ la proposition $\mathcal{P}_n$:
« pour toutes variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes telles que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$ on a $X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \dots + k_n, p)$ ».
Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- Initialisation : le cas $n = 2$ est un résultat de cours.
- Hérédité : supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \geq 2$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$. On pose $Y = X_1 + \dots + X_n$. Montrons que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. On sait que $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes donc pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_{n+1}(\Omega)$ on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n+1} P([X_k = x_k]).$$

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_{n+1} = x_{n+1}])_{x_{n+1} \in X_{n+1}(\Omega)}$ on trouve donc :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) &= \sum_{x_{n+1} \in X_{n+1}(\Omega)} P\left(\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) \cap [X_{n+1} = x_{n+1}]\right) \\ &= \sum_{x_{n+1} \in X_{n+1}(\Omega)} \prod_{k=1}^{n+1} P([X_k = x_k]) \\ &= \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]) \sum_{x_{n+1} \in X_{n+1}(\Omega)} P([X_{n+1} = x_{n+1}]) \\ &= \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]). \end{aligned}$$

Cela montre :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]).$$

Ainsi $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. D'après l'hypothèse de récurrence, Y suit donc une loi $\mathcal{B}(k_1 + \dots + k_n, p)$. D'après le lemme des coalitions, Y et X_{n+1} sont indépendantes. D'après $\mathcal{P}_2$, on a donc :

$$X_1 + \dots + X_{n+1} = Y + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \dots + k_n + k_{n+1}, p).$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 2$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2. Même preuve que pour la question précédente.

Correction de l'exercice 8.

1. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P([Y+1 = n]) = P([Y = n-1]) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-(n-1)}.$$

Ainsi $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-1})$. Ainsi :

$$E(Y) = E(Y + 1 - 1) = E(Y + 1) - 1 = \frac{1}{1 - e^{-1}} - 1 = \frac{1}{e - 1}$$

et

$$V(Y) = V(Y + 1) = \frac{e}{(e - 1)^2}.$$

2. Soit U une variable de Bernoulli telle que $P(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes et on note $T = (2U - 1)Y$.

(a) La variable aléatoire T est un produit de variables aléatoires discrètes donc c'est une variable aléatoire discrète. Comme $(2U - 1)(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $T(\Omega) = \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- si $n > 0$ on a, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T = n, U = 1) + P(T = n, U = 0) \\ &= P(Y = n, U = 1) + P(-Y = n, U = 0) \\ &= P(Y = n)P(U = 1) + P(Y = -n)P(U = 0) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n} + 0 \end{aligned}$$

car $-n < 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$ on a de même :

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P(T = 0, U = 1) + P(T = 0, U = 0) \\ &= P(Y = 0, U = 1) + P(Y = 0, U = 0) \\ &= P(Y = 0)P(U = 1) + P(Y = 0)P(U = 0) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-0} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-0} \\ &= 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

- Si $n < 0$ on a de même :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T = n, U = 1) + P(T = n, U = 0) \\ &= P(Y = n, U = 1) + P(-Y = n, U = 0) \\ &= P(Y = n)P(U = 1) + P(Y = -n)P(U = 0) \quad (\text{indépendance}) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^n \end{aligned}$$

car $n < 0$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

(b) Comme U et Y sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, $2U - 1$ et Y sont indépendantes. De plus, $2U - 1$ et Y possèdent une espérance. Donc T possède une espérance et

$$E(T) = E(2U - 1)E(Y) = 0.$$

(c) Comme $(2U - 1)(\Omega) = \{-1, 1\}$ alors $((2U - 1)^2)(\Omega) = \{1\}$ donc

$$T^2 = (2U - 1)^2 Y^2 = Y^2.$$

Comme Y possède un moment d'ordre 2 et que $T^2 = Y^2$, T possède un moment d'ordre 2 aussi, donc une variance. Par la formule de Koenig-Huygens on a :

$$V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = \frac{e + 1}{(e - 1)^2}.$$

Correction de l'exercice 9.

1. La variable X compte le nombre de succès (avoir une cellule maligne) de probabilité p dans n répétitions indépendantes de l'épreuve de Bernoulli consistant à analyser si une cellule est maligne ou non. Ainsi X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
De même X suit la loi $\mathcal{B}(m, p)$.
2. La variable $X + Y$ représente le nombre total de cellules malignes dans les deux prélèvements. Le même raisonnement que ci-dessus donne donc que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n + m, p)$ (on suppose les deux prélèvements indépendants).
3. Soit $k \in \llbracket 0, m + n \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X+Y=k]}(X = \ell) &= \frac{\mathbb{P}(X = \ell, X + Y = k)}{\mathbb{P}(X + Y = k)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = \ell, Y = k - \ell)}{\mathbb{P}(X + Y = k)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = \ell)\mathbb{P}(Y = k - \ell)}{\mathbb{P}(X + Y = k)} \quad (\text{indépendance}). \end{aligned}$$

Si $\ell > k$ alors $\mathbb{P}(Y = k - \ell) = 0$ donc $\mathbb{P}_{[X+Y=k]}(X = \ell) = 0$.

Si $\ell \leq k$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X+Y=k]}(X = \ell) &= \frac{\mathbb{P}(X = \ell)\mathbb{P}(Y = k - \ell)}{\mathbb{P}(X + Y = k)} \\ &= \frac{\binom{n}{\ell} p^\ell (1 - p)^{n-\ell} \binom{m}{k-\ell} p^{k-\ell} (1 - p)^{m-k+\ell}}{\binom{n+m}{k} p^k (1 - p)^{n+m-k}} \\ &= \frac{\binom{n}{\ell} \binom{m}{k-\ell}}{\binom{n+m}{k}}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variables aléatoires réelles indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p .

1. (a) On a $(G_1 + G_2)(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([G_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([G_1 + G_2 = n]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([G_1 = i, G_1 + G_2 = n]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([G_1 = i, G_2 = n - i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}([G_1 = i, G_2 = n - i]) \end{aligned}$$

car $\mathbb{P}([G_1 = i, G_2 = n - i]) = 0$ si $n \leq i$. D'où par indépendance de G_1 et G_2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([G_1 + G_2 = n]) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}([G_1 = i]) \mathbb{P}([G_2 = n - i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} p(1-p)^{i-1} p(1-p)^{n-i-1} \quad \text{car } G_1 \text{ et } G_2 \text{ suivent une loi } \mathcal{G}(p) \\ &= p^2 \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1+n-i-1} \\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

Comme G_1 et G_2 possèdent une espérance, $G_1 + G_2$ aussi et par linéarité on a donc :

$$\mathbb{E}(G_1 + G_2) = \mathbb{E}(G_1) + \mathbb{E}(G_2) = \frac{2}{p}.$$

(b) On a $(G_1 - G_2)(\Omega) = \mathbb{Z}$. En effet, soit $j \in \mathbb{Z}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([G_1 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$, on a

$$\begin{aligned} P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_1 - G_2 = j, G_1 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([k - G_2 = j, G_1 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2 = k - j, G_1 = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \quad \text{car } G_1 \text{ et } G_2 \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

Or, $G_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $P([G_2 = k - j]) = 0$ pour tous les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k - j \leq 0$ c'est-à-dire pour tous les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \leq j$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \geq j+1}}^{+\infty} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \end{aligned}$$

i. Si $j \geq 0$, alors $\mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[$ est l'ensemble des nombres entiers supé-

rieurs ou égaux à $j + 1$ donc on obtient :

$$\begin{aligned}
 P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-j-1} p(1-p)^{k-1} \\
 &= p^2 \sum_{k=j+1}^{+\infty} (1-p)^{2k-j-2} \\
 &= p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell+j-2}
 \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $\ell = k - j$. Donc

$$\begin{aligned}
 P([G_1 - G_2 = j]) &= p^2 \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell+j-2} \\
 &= p^2 (1-p)^{j-2} \sum_{\ell=1}^{+\infty} (1-p)^{2\ell} \\
 &= p^2 (1-p)^{j-2} \left(\frac{1}{1 - (1-p)^2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

car on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $(1-p)^2$ moins son premier terme. En simplifiant un peu l'expression, on trouve :

$$P([G_1 - G_2 = j]) = \frac{p(1-p)^j}{2-p}.$$

- ii. Si $j < 0$, alors $j + 1 \leq 0$ donc $\mathbb{N}^* \cap [j + 1, +\infty[= \mathbb{N}^*$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
 P([G_1 - G_2 = j]) &= \sum_{k \in \mathbb{N}^* \cap [j+1, +\infty[} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([G_2 = k - j]) P([G_1 = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-j-1} p(1-p)^{k-1} \\
 &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-j-2} \\
 &= \frac{p^2}{(1-p)^{j+2}} \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k} \\
 &= \frac{p^2}{(1-p)^{j+2}} \left(\frac{1}{1 - (1-p)^2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

car on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $(1-p)^2$ moins son premier terme. En simplifiant un peu l'expression, on trouve :

$$P([G_1 - G_2 = j]) = \frac{p}{(2-p)(1-p)^j}.$$

Comme G_1 et G_2 possèdent une espérance, $G_1 - G_2$ aussi et par linéarité on a donc :

$$\mathbb{E}(G_1 - G_2) = \mathbb{E}(G_1) - \mathbb{E}(G_2) = \frac{2}{p}.$$

(c) Remarquons que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$[G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j] = \left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j \right].$$

En effet, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} \omega \in [G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j] &\Leftrightarrow \begin{cases} G_1(\omega) + G_2(\omega) = i \\ G_1(\omega) - G_2(\omega) = j \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2G_1(\omega) = i+j \\ G_1(\omega) - G_2(\omega) = j \end{cases} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}([G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j]) = \mathbb{P}\left(\left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j\right]\right).$$

Or, comme G_1 suit une loi géométrique de paramètre p , $G_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc, pour les entiers i et j tels que $\frac{i+j}{2} \notin \mathbb{N}^*$, on a forcément :

$$\mathbb{P}([G_1 + G_2 = i, G_1 - G_2 = j]) = \mathbb{P}\left(\left[G_1 = \frac{i+j}{2}, G_1 - G_2 = j\right]\right) = 0.$$

Par exemple :

$$\mathbb{P}([G_1 + G_2 = 2, G_1 - G_2 = 1]) = \mathbb{P}\left(\left[G_1 = \frac{3}{2}, G_1 - G_2 = 1\right]\right) = 0$$

car $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}^*$.

D'autre part, les questions précédentes montrent que :

$$\mathbb{P}([G_1 + G_2 = 2]) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([G_1 - G_2 = 1]) \neq 0.$$

Ainsi $G_1 + G_2$ et $G_1 - G_2$ ne sont pas indépendantes.

(d) Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(G_1 + G_2, G_1 - G_2) &= \mathbb{E}((G_1 + G_2)(G_1 - G_2)) - \mathbb{E}(G_1 + G_2)\mathbb{E}(G_1 - G_2) \\ &= \mathbb{E}(G_1^2 - G_2^2) \\ &= \mathbb{E}(G_1^2) - \mathbb{E}(G_2^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. (a) On a $I(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$I(\omega) > k \iff \min(G_1(\omega), G_2(\omega)) > k \iff G_1(\omega) > k \text{ et } G_2(\omega) > k.$$

Donc

$$[I > k] = [G_1 > k] \cap [G_2 > k].$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\min(G_1, G_2) > k]) &= \mathbb{P}([G_1 > k] \cap [G_2 > k]) \\ &= \mathbb{P}([G_1 > k]) \mathbb{P}([G_2 > k]) \quad \text{par indépendance de } G_1 \text{ et } G_2 \\ &= \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \right) \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} \right) \\ &= p^2 \left(\sum_{\ell=k}^{+\infty} (1-p)^\ell \right)^2 \\ &= (1-p)^{2k}. \end{aligned}$$

- On a donc :

$$\mathbb{P}([\min(G_1, G_2) = 1]) = 1 - P([\min(G_1, G_2) > 1]) = 1 - (1-p)^2$$

et, pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\min(G_1, G_2) = k]) &= \mathbb{P}([\min(G_1, G_2) > k-1]) - \mathbb{P}([\min(G_1, G_2) > k]) \\ &= (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} \\ &= (1-p)^{2(k-1)}(1 - (1-p)^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\min(G_1, G_2)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^2$.

On a $S(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$S(\omega) \leq k \iff \max(G_1(\omega), G_2(\omega)) \leq k \iff G_1(\omega) \leq k \text{ et } G_2(\omega) \leq k.$$

Donc

$$[S \leq k] = [G_1 \leq k] \cap [G_2 \leq k].$$

- Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\max(G_1, G_2) \leq k]) &= \mathbb{P}([G_1 \leq k] \cap [G_2 \leq k]) \\ &= \mathbb{P}([G_1 \leq k]) \mathbb{P}([G_2 \leq k]) \quad \text{par indépendance} \\ &= \left(\sum_{i=1}^k p(1-p)^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^k p(1-p)^{j-1} \right) \\ &= p^2 \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} (1-p)^\ell \right)^2 \\ &= (1 - (1-p)^k)^2. \end{aligned}$$

- On a donc :

$$\mathbb{P}([\max(G_1, G_2) = 1]) = p^2$$

et, pour tout $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\max(G_1, G_2) = k]) &= \mathbb{P}([\max(G_1, G_2) \leq k]) - \mathbb{P}([\max(G_1, G_2) \leq k-1]) \\ &= (1 - (1-p)^k)^2 - (1 - (1-p)^{k-1})^2 \\ &= p(1-p)^{k-1}(2 - (2-p)(1-p)^{k-1}). \end{aligned}$$

- (b) La variable I suit une loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^2$ donc possède une espérance et

$$\mathbb{E}(I) = \frac{1}{1 - (1-p)^2}.$$

Pour justifier l'existence et calculer l'espérance de S on peut procéder de plusieurs façons.

- Méthode 1 : on remarque que $I + S = G_1 + G_2$ donc $S = G_1 + G_2 - I$. Ainsi, comme on vient de voir que $G_1 + G_2$ et I possèdent une espérance, S aussi et par linéarité on a :

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(G_1 + G_2) - \mathbb{E}(I) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{1-p}{p(2-p)}.$$

- Méthode 2 : on connaît la loi de S . Par définition, S possède une espérance si la série $\sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}([S = k])$ est absolument convergente. Comme cette série est à termes positifs, elle est absolument convergente si et seulement si elle est convergente. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} k \mathbb{P}([S = k]) &= k((1 - (1-p)^k)^2 - (1 - (1-p)^{k-1})^2) \\ &= k((1-p)^{2k} - (1-p)^{2(k-1)} + 2(1-p)^{k-1} - 2(1-p)^k) \\ &= k(1-p)^{2(k-1)}((1-p)^2 - 1) + 2pk(1-p)^{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}([S = k])$ est combinaison linéaire des séries géométriques dérivées premières $\sum_{k \geq 1} k(1-p)^{2(k-1)}$ et $\sum_{k \geq 1} k(1-p)^{(k-1)}$ de raison respective $(1-p)^2$ et $(1-p)$. Comme $|1-p| < 1$ et $|(1-p)^2| < 1$, ces séries convergent et par conséquent, $\sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}([S = k])$ converge absolument. Ainsi, S possède une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}([S = k]) \\ &= ((1-p)^2 - 1) \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{2(k-1)} + 2p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= ((1-p)^2 - 1) \times \frac{1}{(1 - (1-p)^2)^2} + 2p \times \frac{1}{(1 - (1-p))^2} \\ &= -\frac{1}{1 - (1-p)^2} + \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

(c) On a vu que I suit la loi $\mathcal{G}(1(1-p)^2)$. Ainsi I possède une variance et :

$$\mathbb{V}(I) = \frac{1 - (1 - (1-p)^2)}{(1 - (1-p)^2)^2} = \frac{(1-p)^2}{(1 - (1-p)^2)^2}.$$

(d) Comme I suit une loi géométrique, elle possède un moment d'ordre 2. Avec la question précédente, on voit facilement que S possède aussi un moment d'ordre 2.

Comme I et S possèdent un moment d'ordre 2, elles possèdent une covariance et d'après la formule de Koenig-Huygens on a :

$$\text{Cov}(I, S) = \mathbb{E}(IS) - \mathbb{E}(I)\mathbb{E}(S).$$

Or

$$— \mathbb{E}(I) = \frac{1}{1 - (1-p)^2}.$$

$$— \mathbb{E}(S) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1 - (1-p)^2}.$$

— En remarquant que $IS = G_1 G_2$, on obtient par indépendance de G_1 et G_2 :

$$\mathbb{E}(IS) = \mathbb{E}(G_1 G_2) = \mathbb{E}(G_1)\mathbb{E}(G_2) = \frac{1}{p^2}.$$

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(I, S) &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{1 - (1-p)^2} \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{1 - (1-p)^2} \right) \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(2-p)} \left(\frac{2}{p} - \frac{1}{p(2-p)} \right) \\ &= \frac{(2-p)^2 - 2(2-p) + 1}{p^2(2-p)^2} \\ &= \frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}. \end{aligned}$$

3. Posons $\Delta = |G_1 - G_2|$.

— **Méthode 1** : on remarque que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Ainsi

$$I = \frac{G_1 + G_2 - \Delta}{2}$$

d'où

$$\Delta = G_1 + G_2 - 2I.$$

Par linéarité Δ possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(\Delta) = \mathbb{E}(G_1) + \mathbb{E}(G_2) - 2\mathbb{E}(I) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{2}{1 - (1-p)^2} = \frac{2 - 2p}{p(1-p)}.$$

— **Méthode 2** : on remarque :

$$\Delta = S - I.$$

Correction de l'exercice 11.

1. On va commencer par étudier la loi de A . On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement S : « le tireur touche deux fois la cible ». Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= P([\text{atteindre la cible au 1}^{\text{er}} \text{ tir}] \cap [\text{atteindre la cible au 2}^{\text{er}} \text{ tir}]) \\ &= \mathbb{P}([\text{atteindre la cible au 1}^{\text{er}} \text{ tir}]) \mathbb{P}([\text{atteindre la cible au 2}^{\text{er}} \text{ tir}]) \\ &= p^2.\end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n tireurs indépendants, la variable A compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi A suit la loi $\mathcal{B}(n, p^2)$.

Étudions maintenant la loi de B . On considère l'épreuve de Bernoulli dont le succès est l'événement S : « le tireur touche exactement une fois la cible ». Comme les deux tirs d'un tireur sont supposés indépendants, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= P([\text{atteindre la cible au 1}^{\text{er}} \text{ tir}] \cap [\text{rater la cible au 2}^{\text{er}} \text{ tir}]) \\ &\quad + \mathbb{P}([\text{rater la cible au 1}^{\text{er}} \text{ tir}]) \mathbb{P}([\text{atteindre la cible au 2}^{\text{er}} \text{ tir}]) \\ &= p(1 - p) + (1 - p)p \\ &= 2p(1 - p).\end{aligned}$$

Maintenant, si on répète cette épreuve de Bernoulli avec n tireurs indépendants, la variable B compte le nombre de tireurs ayant eu un succès. Ainsi B suit la loi $\mathcal{B}(n, 2p(1 - p))$.

2. Or, les événements $[A = n]$ et $[B = 1]$ sont incompatibles car il n'y a que n tireurs. Donc

$$\mathbb{P}([A = n, B = 1]) = 0.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}([A = n]) = p^{2n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([B = 1]) = n2p(1 - p)(1 - 2p(1 - p))^{n-1}.$$

Comme $p \in]0, 1[$, on obtient donc

$$\mathbb{P}([A = n]) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([B = 1]) \neq 0$$

et par conséquent,

$$\mathbb{P}([A = n]) \mathbb{P}([B = 1]) \neq \mathbb{P}([A = n, B = 1]).$$

Ainsi A et B ne sont pas indépendantes.

3. On a vu que A suit la loi $\mathcal{B}(n, p^2)$ et B suit la loi $\mathcal{B}(n, 2p(1 - p))$.

- **Méthode 1** : on considère la variable aléatoire C comptant le nombre de tireurs ne touchant aucune cible : C compte le nombre de succès lorsque l'expérience de Bernoulli de succès « rater les deux cibles » est répétée n fois de manière indépendante. Donc C suit la loi $\mathcal{B}(n, (1 - p)^2)$.

Or $A + B + C = n$ car chaque tireur touche ou bien deux cibles, ou bien une seule ou bien aucune. Par conséquent :

$$\text{Cov}(A, A + B + C) = \text{Cov}(A, n) = 0.$$

D'autre part, par linéarité à droite, on a :

$$\text{Cov}(A, A + B + C) = \mathbb{V}(A) + \text{Cov}(A, B) + \text{Cov}(A, C).$$

Ainsi :

$$\text{Cov}(A, B) = -\text{Cov}(A, C) - \mathbb{V}(A).$$

De même, on trouve :

$$\text{Cov}(C, A) = -\text{Cov}(C, B) - \mathbb{V}(C) \quad \text{et} \quad \text{Cov}(B, C) = -\text{Cov}(B, A) - \mathbb{V}(B).$$

Ainsi, on obtient par symétrie de la covariance :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(A, B) &= -\text{Cov}(A, C) - \mathbb{V}(A) \\ &= \text{Cov}(C, B) + \mathbb{V}(C) - \mathbb{V}(A) \\ &= -\text{Cov}(B, A) - \mathbb{V}(B) + \mathbb{V}(C) - \mathbb{V}(A) \\ &= -\text{Cov}(A, B) - \mathbb{V}(B) + \mathbb{V}(C) - \mathbb{V}(A). \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{Cov}(A, B) = \frac{-\mathbb{V}(B) + \mathbb{V}(C) - \mathbb{V}(A)}{2}.$$

En remplaçant $\mathbb{V}(A)$, $\mathbb{V}(B)$ et $\mathbb{V}(C)$ par leurs valeurs respectives on obtient :

$$\text{Cov}(A, B) = -2np^3(1 - p).$$

- **Méthode 2 :** d'après la formule de Koenig-Huygens (les variables étant à support fini elles possèdent bien un moment d'ordre deux) on a :

$$\text{Cov}(A, B) = \mathbb{E}(AB) - \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(AB) - 2n^2p^3(1 - p).$$

Calculons maintenant $\mathbb{E}(AB)$. D'après le théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}(AB) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ij \mathbb{P}(A = i, B = j).$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. L'événement $[A = i, B = j]$ est réalisé si et seulement si i tireurs touchent les deux cibles, j tireurs touchent une seule cible (et les autres ne touchent donc aucune cible). Comme il n'y a que n tireurs, on a :

$$i + j > n \implies \mathbb{P}(A = i, B = j) = 0.$$

Si $i + j \leq n$ on a :

$$\mathbb{P}(A = i, B = j) = \underbrace{\binom{n}{i}}_{(*)} p^{2i} \underbrace{\binom{n-i}{j} (2p(1-p))^j}_{(**)} \underbrace{(1-p)^{2(n-i-j)}}_{(***)}.$$

En effet :

- (*) il y a $\binom{n}{i}$ choix possibles pour les i tireurs qui vont toucher les deux cibles et la probabilité qu'un tireur touche deux cibles est p^2 ;
- (**) il y a alors $\binom{n-i}{j}$ pour les j tireurs qui vont toucher une des deux cibles et la probabilité qu'un tireur touche une des deux cibles exactement est $2p(1-p)$;
- (***) les $n-i-j$ tireurs restants ne touchent aucune cible et la probabilité qu'un tireur ne touche aucune cible est $(1-p)^2$.

Dans la suite, on note $p_A = p^2$, $p_B = 2p(1-p)$ et $p_C = (1-p)^2$ de sorte que $p_A + p_B + p_C = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(AB) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ij \mathbb{P}(A=i, B=j) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} ij \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} p_A^i p_B^j p_C^{n-i-j}\end{aligned}$$

car si $j > n-i$ alors $i+j > n$ et $\mathbb{P}(A=i, B=j) = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(AB) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} ij \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} p_A^i p_B^j p_C^{n-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i p_A^i \sum_{j=0}^{n-i} j \binom{n-i}{j} \underbrace{p_B^j p_C^{n-i-j}}_{=0 \text{ si } j=0} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} j \binom{n-i}{j} p_B^j p_C^{n-i-j}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $j \in \llbracket 1, n-i \rrbracket$ on a : $j \binom{n-i}{j} = (n-i) \binom{n-i-1}{j-1}$ d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(AB) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} j \binom{n-i}{j} p_B^j p_C^{n-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} (n-i) \binom{n-i-1}{j-1} p_B^j p_C^{n-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i-1}{j-1} p_B^j p_C^{n-i-j}.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $k = j - 1$ puis en utilisant la formule du

binôme de Newton on trouve :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(AB) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i \sum_{j=1}^{n-i} \binom{n-i-1}{j-1} p_B^j p_C^{n-i-j} \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i \sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{k} p_B^{k+1} p_C^{n-i-1-k} \\
 &= p_B \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i \sum_{k=0}^{n-i-1} \binom{n-i-1}{k} p_B^k p_C^{n-i-1-k} \\
 &= p_B \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (n-i) i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} \\
 &= p_B \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (ni - i^2) p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} \\
 &= p_B \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} n i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^2 p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} \right) \\
 &= p_B \left(n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^2 p_A^i (p_C + p_B)^{n-i-1} \right) \\
 &= \frac{p_B}{p_C + p_B} \left(n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^2 p_A^i (p_C + p_B)^{n-i} \right).
 \end{aligned}$$

Comme $p_A + p_B + p_C = 1$ on reconnaît dans la somme

$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i p_A^i (p_C + p_B)^{n-i}$ l'espérance d'une variable X de loi $\mathcal{B}(n, p_A)$ et dans

la somme $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^2 p_A^i (p_C + p_B)^{n-i}$ son moment d'ordre 2. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 E(AB) &= \frac{p_B}{p_C + p_B} (n\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2)) \\
 &= \frac{p_B}{p_C + p_B} (n\mathbb{E}(X) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{E}(X)^2) \\
 &= \frac{p_B}{p_C + p_B} (n^2 p_A - n p_A (1 - p_A) - n^2 p_A^2) \\
 &= \frac{n p_A p_B}{1 - p_A} (n - (1 - p_A) - n p_A) \\
 &= n(n-1) p_A p_B \\
 &= 2n(n-1) p^3 (1-p).
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(A, B) &= \mathbb{E}(AB) - 2n^2 p^3 (1-p) \\
 &= 2n(n-1) p^3 (1-p) - 2n^2 p^3 (1-p) \\
 &= -2n p^3 (1-p).
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12.

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La variable aléatoire X_i suit la loi $\mathcal{B}(k, \frac{1}{n})$.
2. Soit $i \neq j$. On a $P(X_i = k, X_j = k) = 0$ car en k tirages on ne peut pas tirer k fois la boule i et k fois la boule j . Or, d'après la question précédente, $P(X_i = k)$ et $P(X_j = k)$ sont non nulles donc

$$P(X_i = k, X_j = k) \neq P(X_i = k)P(X_j = k).$$

Ainsi, les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes. Donc les variables $X_1, \dots, X_n$ ne le sont pas.

3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.
 - (a) La variable $X_i + X_j$ compte le nombre de succès lorsqu'on répète k fois indépendantes l'expérience de Bernoulli de succès « avoir la boule i ou la boule j ». La probabilité de succès est $\frac{2}{n}$ donc $X_i + X_j$ suit la loi $\mathcal{B}(k, \frac{2}{n})$.
 - (b) On sait que $V(X_i + X_j) = \frac{2k}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. D'autre part, on a

$$V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2\text{Cov}(X_i, X_j) = 2 \times \frac{k}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2\text{Cov}(X_i, X_j).$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{k}{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right) - \frac{k}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{k}{n^2}.$$