

DIAGONALISATION

Dans tout le chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

13.1 Éléments propres

13.1.1 Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 13.1 (Valeur propre, vecteur propre)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1. • On dit que λ est une **valeur propre** de f s'il existe un **vecteur non nul** x de E tel que

$$f(x) = \lambda \cdot x.$$

- Dans ce cas, on dit que x est un **vecteur propre de f associé à la valeur propre λ** .

2. • On dit que λ est une **valeur propre** de A s'il existe un **vecteur non nul** $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que

$$AX = \lambda \cdot X.$$

- Dans ce cas, on dit que X est un **vecteur propre de A associé à la valeur propre λ** .

Définition 13.2 (Spectre)

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le **spectre de f** et noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$.
2. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre de A** et noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Proposition 13.1 (Lien entre endomorphisme et matrice)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E et on note A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $x \in E$ et notons $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$f(x) = \lambda \cdot x \iff AX = \lambda \cdot X.$$

2. En conséquence :

- λ est une valeur propre de $f \iff \lambda$ est une valeur propre de A .
- $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$.
- x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda \iff X$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Dire que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ signifie qu'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda \cdot x$ ou encore que $f(x) - \lambda \cdot x = 0_E$.
Ainsi :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_E) \neq \{0_E\}.$$

Comme on est en dimension finie, on en déduit :

Proposition 13.2 (Caractérisation des valeurs propres)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(f) &\iff \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_E) \neq \{0_E\} \iff f - \lambda \cdot \text{id}_E \text{ n'est pas injective} \\ &\iff f - \lambda \cdot \text{id}_E \text{ n'est pas surjective} \\ &\iff f - \lambda \cdot \text{id}_E \text{ n'est pas bijective.} \end{aligned}$$

2.

$$\lambda \in \text{Sp}(A) \iff A - \lambda \cdot I_n \text{ n'est pas inversible.} \iff \text{rg}(A - \lambda \cdot I_n) < n.$$

Corollaire 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Corollaire 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors : $\lambda \in \text{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda \cdot I_2) = 0$.

Méthode 13.1 (Déterminer le spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice)

1. Dans le cas d'un endomorphisme, on utilise la proposition 13.1 pour se ramener au cas d'une matrice.
2. Dans le cas d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - (a) Si A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
 - (b) Si $n = 2$, les valeurs propres sont les racines de $\det(A - \lambda I_2) = 0$ (qui est un polynôme de degré au plus 2 de la variable λ).
 - (c) Sinon, on calcul le rang de $A - \lambda I_n$: on transforme donc la matrice $A - \lambda \cdot I_n$ en une matrice triangulaire par le pivot de Gauss. Les valeurs propres sont alors les valeurs de λ pour lesquelles le rang est strictement inférieur à n , c'est-à-dire pour lesquelles au moins un des coefficients diagonaux de la réduite de Gauss est nul.

13.1.2 Sous-espaces propres
Définition 13.3 (Sous-espaces propres)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f .

Le **sous-espace propre de f** associé à la valeur propre λ est l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda \cdot x\} = \ker(f - \lambda \cdot \text{id}_E).$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A .

Le **sous-espace propre de A** associé à la valeur propre λ est l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda \cdot X\} = \ker(A - \lambda \cdot I_n).$$

Remarque 13.1.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace propre de f est un sous-espace vectoriel de E . En effet, le noyau d'une application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de départ.
De même, si $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, un sous-espace propre de A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est l'ensemble formé des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ **et du vecteur nul**.
De même, le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est l'ensemble formé des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ **et du vecteur nul**.
3. Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$, les sous-espaces propres associés à une valeur propre λ de f et de A **ne sont pas égaux** en général : $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors que $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E . En revanche, d'après la proposition 13.1 on a :

$$x \in E_\lambda(f) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in E_\lambda(A).$$

Proposition 13.3 (Cas particulier de la valeur propre 0)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$0 \in \text{Sp}(f) \iff \ker(f) \neq \{0_E\} \iff f \text{ n'est pas bijective.}$$

Dans ce cas, l'espace propre de f associé à 0 est $\ker(f)$.

Remarque 13.2. Ceci est aussi valable pour les matrices. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $0 \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si A n'est pas inversible.

13.2 Diagonalisation

13.2.1 Famille de vecteurs propres

Proposition 13.4

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres **distinctes** de f (respectivement de A) et, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ soit $\mathcal{F}_i$ une famille libre de $E_{\lambda_i}(f)$ (respectivement $E_{\lambda_i}(A)$).

Alors la famille $\mathcal{F}$ obtenue par concaténation des familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p$ est libre.

Remarque 13.3.

1. En particulier, si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre de E .
2. De même, si $X_1, \dots, X_p$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes alors la famille $(X_1, \dots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Corollaire 3 (Nombre maximal de valeurs propres distinctes)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f possède au plus n valeurs propres distinctes.

De plus, si $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ alors

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(f)) \leq n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.

De plus, si $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ alors

$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(A)) \leq n.$$

13.2.2 Diagonalisation

Définition 13.4 (Diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale. Cela équivaut à l'existence d'une base de E formée de vecteurs propres de f .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$D = P^{-1}AP.$$

Proposition 13.5 (Lien entre endomorphisme et matrice)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}$$

Proposition 13.6 (Critère de diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Alors

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(f)) = n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Alors

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n.$$

Proposition 13.7 (Condition suffisante de diagonalisabilité)

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable. Dans ce cas tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable. Dans ce cas tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Méthode 13.2 (Déterminer les matrices P et D en cas de diagonalisabilité)

En cas de diagonalisabilité d'une matrice A , une fois les valeurs propres et une base des sous-espaces propres déterminées :

1. la matrice diagonale D est obtenue en mettant sur la diagonale les valeurs propres, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre associé ;
2. les colonnes de P sont les vecteurs des bases des sous-espaces propres que l'on place dans le même ordre que les valeurs propres correspondantes.

13.3 Applications

13.3.1 Puissance de matrices

La diagonalisation fournit une méthode efficace pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.

Proposition 13.8 (À savoir redémontrer)

Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{PGL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PB^nP^{-1}.$$

Preuve : Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{PGL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = PB^nP^{-1}.$$

- Initialisation : $A^0 = I_n$ et $PB^0P^{-1} = PP^{-1} = I_n$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $A^n = PB^nP^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = PB^nP^{-1}A \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= PB^nP^{-1}PBP^{-1} \quad \text{car } A = PBP^{-1} \\ &= PB^nI_nBP^{-1} \quad \text{car } I_n = PP^{-1} \\ &= PB^nBP^{-1} \quad \text{car } I_nB = B \\ &= PB^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

- Conclusion : par le principe de récurrence, on a prouvé le résultat souhaité. □

Si A une matrice diagonalisable : il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad A = PDP^{-1}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = P D^n P^{-1}.$$

Comme D est diagonale, le calcul de D^n est facile.

Exemple 13.1 (Application à l'étude de suites récurrentes linéaires). Voir l'exercice 11 du TD 13 et sa correction.

Exemple 13.2 (Application à l'étude d'une marche aléatoires sur un graphe). Voir l'exercice 12 du TD 13 (questions 1.(a) à 1.(e)) et sa correction.
Voir l'exercice 7 du TD 11 et sa correction.

13.3.2 Systèmes différentiels linéaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \dots + a_{1,n}y_n = y'_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \dots + a_{n,n}y_n = y'_n \end{cases}$$

où $y_1, \dots, y_n$ des fonctions dérivables définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

En posant pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ \vdots \\ y'_n(t) \end{pmatrix}$$

alors $(y_1, \dots, y_n)$ est solution du système différentiel si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = AY(t).$$

Remarque 13.4.

1. Quand $n = 1$, il s'agit simplement d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 comme vous en avez rencontrées en première année.
2. Si A est une matrice diagonale, le système devient :

$$\begin{cases} a_{1,1}y_1 = y'_1 \\ \vdots \\ a_{n,n}y_n = y'_n \end{cases}$$

et il s'agit juste de résoudre n équations différentielles linéaire d'ordre 1.

Lorsque la matrice A est diagonale, le système est donc particulièrement simple à résoudre. Lorsque A est diagonalisable, diagonaliser A va permettre de se ramener à un tel système où la matrice est diagonale. La méthode est à savoir : vous devez être capable de refaire le raisonnement.

Méthode 13.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une **matrice diagonalisable**. Il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que :

$$D = P^{-1}AP.$$

On s'intéresse au système différentiel $Y' = AY$.

1. On pose $X = P^{-1}Y$. Alors :

$$\begin{aligned} Y' = AY &\iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \\ &\iff X' = DX. \end{aligned}$$

La dernière équivalence vient du fait $P^{-1}Y' = (P^{-1}Y)'$ par linéarité de la dérivation.

Ainsi, Y est solution du système $Y' = AY$ si et seulement si X est solution du système $X' = DX$.

2. Comme D est diagonale le système $X' = DX$ s'écrit, en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est :

$$\begin{cases} d_{1,1}x_1 &= x'_1 \\ \vdots &\vdots \\ d_{n,n}x_n &= x'_n \end{cases}.$$

Il s'agit simplement de n équations linéaires d'ordre 1 à coefficients constants que vous savez résoudre depuis l'an dernier.

3. On en déduit les solutions Y à l'aide de la formule $Y = PX$.

Exemple 13.3. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y'_2 = y_1 + 2y_2 + y_3 \\ y'_3 = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}.$$

1. **Mettre le système sous forme matricielle.** On note A la matrice déterminée.

Soit (y_1, y_2, y_3) un triplet de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

En posant, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, $Y'(t) = \begin{pmatrix} y'_1(t) \\ y'_2(t) \\ y'_3(t) \end{pmatrix}$ on a :

$$(y_1, y_2, y_3) \text{ solution du système} \iff \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y(t).$$

On notera A la matrice carrée ci-dessus.

2. Étudier la diagonalisabilité de A .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right)$$

En ajoutant toutes les colonnes à la première on obtient donc :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi on trouve :

$$\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda = 4 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1.$$

Donc : $\text{Sp}(A) = \{1, 4\}$.

Déterminons les sous-espaces propres : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a :

$$\begin{aligned} X \in E_4(A) &\iff \begin{cases} 2x + y + z = 4x \\ x + 2y + z = 4y \\ x + y + 2z = 4z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{car } L_1 = -L_3 - L_2 \\ &\iff \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } E_4(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

De même :

$$X \in E_1(A) \iff \begin{cases} 2x + y + z = x \\ x + 2y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \iff x + y + z = 0.$$

$$\text{Ainsi : } E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

En posant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a bien :

$$D = P^{-1}AP.$$

3. **On pose, pour tout** $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = P^{-1}Y(t)$. Alors :

$$\begin{aligned} Y' = AY &\iff Y' = PDP^{-1}Y \iff P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \\ &\iff X' = DX \end{aligned}$$

car $P^{-1}Y' = (P^{-1}Y)'$ par linéarité de la dérivation.

Ainsi, Y est solution du système $Y' = AY$ si et seulement si X est solution du système $X' = DX$.

4. **Résolution de** $X' = DX$.

Comme D est diagonale le système $X' = DX$ est, en posant $\forall t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) \\ x_3'(t) = x_3(t) \end{cases}.$$

Les triplets solutions sont les triplets de fonctions (x_1, x_2, x_3) tels pour lesquels il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{4t} \\ x_2(t) = c_2 e^t \\ x_3(t) = c_3 e^t \end{cases}.$$

5. **Conclusion.** Ainsi, Y est solution du système si et seulement si il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 e^{4t} \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{4t} - c_2 e^t - c_3 e^t \\ c_1 e^{4t} + c_2 e^t \\ c_1 e^{4t} + c_3 e^t \end{pmatrix}.$$

Remarque 13.5. Soient a et b deux réels. On considère l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Soit y une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de l'équation } y'' + ay' + by = 0 &\iff \begin{cases} y' &= & y' \\ (y')' &= & -by - ay' \end{cases} \\ &\iff Y' = AY. \end{aligned}$$

Ainsi l'équation différentielle d'ordre 2 $y'' + ay' + by = 0$ est équivalente au système différentiel $Y' = AY$.

Soit $r \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} r \in \text{Sp}(A) &\iff A - rI_2 \text{ est non inversible} \\ &\iff \det(A - rI_2) = 0. \end{aligned}$$

Or, un calcul direct donne :

$$\det(A - rI_2) = \det \left(\begin{pmatrix} -r & 1 \\ -b & -a-r \end{pmatrix} \right) = r(a+r) + b = r^2 + ar + b.$$

On obtient finalement

$$r \in \text{Sp}(A) \iff r^2 + ar + b = 0$$

et on retrouve l'équation caractéristique de l'équation différentielle d'ordre 2.

En particulier, si l'équation caractéristique **possède deux solutions distinctes** r_1 et r_2 alors A possède deux valeurs propres distinctes r_1 et r_2 donc est diagonalisable.

- Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre r_1 . Soit $(x, y) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} A(x, y) = r_1(x, y) &\iff \begin{cases} y &= r_1 x \\ -bx - ay &= r_1 y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= r_1 x \\ -bx - ar_1 x &= r_1^2 x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y &= r_1 x \\ r_1^2 x + r_1 x + b &= 0 \end{cases} \\ &\iff y = r_1 x. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } E_{r_1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} \right).$$

- De même, $E_{r_2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right)$.
- D'après la méthode ci-dessus les solutions Y sont les fonctions de la forme :

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} : t \mapsto e^{r_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} + e^{r_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

13.3.3 Étude de commutant

On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on cherche à étudier (base, dimension) l'espace vectoriel

$$C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}.$$

Si A est diagonalisable, il existe donc une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$D = P^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad A = PDP^{-1}.$$

Il est souvent plus facile d'étudier C_D puis d'utiliser l'équivalence

$$M \in C_A \iff P^{-1}MP \in C_D$$

pour en déduire des informations sur C_A .