

COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes réelles.

12.1 Lois associées à un couple de variables aléatoires

12.1.1 Loi du couple

Définition 12.1 (Couple de variables aléatoires)

Soient X et Y des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le **couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y) est l'application définie par

$$\begin{aligned} (X, Y) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)). \end{aligned}$$

Définition 12.2 (Loi d'un couple)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On appelle **loi jointe du couple** (X, Y) ou **loi conjointe de X et Y** la donnée de

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega) \text{ et } y \in Y(\Omega).$$

On notera souvent $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour désigner $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$.

12.1.2 Lois marginales

Définition 12.3 (Lois marginales)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle

1. **première loi marginale** du couple (X, Y) la loi de X ,
2. **deuxième loi marginale** du couple (X, Y) la loi de Y .

Proposition 12.1 (Calcul des lois marginales)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On a, d'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événements $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$, pour tout $x \in X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x, Y = y]).$$

2. On a, d'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$, pour tout $y \in Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x, Y = y]).$$

Remarque 12.1. La proposition ci-dessus entraîne en particulier la convergence des séries considérées lorsque le support de X ou Y est infini.

12.1.3 Lois conditionnelles

Définition 12.4 (Lois conditionnelles)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de X sachant (que l'événement) $[Y = y]$ (est réalisé)** la donnée de

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}{\mathbb{P}([Y = y])} \quad \text{pour tout } x \in X(\Omega).$$

- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de Y sachant (que l'événement) $[X = x]$ (est réalisé)** la donnée de

$$\mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) = \frac{\mathbb{P}([Y = y] \cap [X = x])}{\mathbb{P}([X = x])} \quad \text{pour tout } y \in Y(\Omega).$$

Méthode 12.1

Pour déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ à partir de la loi du couple (X, Y) :

1. on commence par déterminer $\mathbb{P}(Y = y)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

2. on calcule ensuite $\mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Méthode 12.2

Pour déterminer la loi marginale de X connaissant :

- la loi marginale de Y
- la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$

on utilise la formule des probabilités totales (version conditionnelle) avec le système complet d'événements $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$:

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega) \mid P([Y=y]) \neq 0} \mathbb{P}_{[Y=y]}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

12.2 Exemples de transfert

12.2.1 Loi du min, max

Méthode 12.3

Soient X et Y deux variables aléatoires à **valeurs entières** définies sur un même espace probabilisé et **indépendantes** et soit $U = \max(X, Y)$.

Pour déterminer la loi de U :

1. on justifie que pour tout $k \in U(\Omega)$ on a $[U \leq k] = [X \leq k] \cap [Y \leq k]$;
2. par indépendance, on en déduit la fonction de répartition F_U de U ;
3. on utilise $P([U = k]) = F_U(k) - F_U(k - 1)$.

Méthode 12.4

Soient X et Y deux variables aléatoires à **valeurs entières** définies sur un même espace probabilisé et **indépendantes** et soit $V = \min(X, Y)$.

Pour déterminer la loi de V :

1. on justifie que pour tout $k \in V(\Omega)$ on a $[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]$;
2. par indépendance, on en déduit $1 - F_V$;
3. on utilise $P([V = k]) = F_V(k) - F_V(k - 1)$.

12.2.2 Loi de la somme

Méthode 12.5

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La variable aléatoire $X + Y$ est une variable aléatoire discrète.

Soit $z \in (X + Y)(\Omega)$. Pour déterminer $\mathbb{P}([X + Y = z])$:

1. on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X ou Y :

$$\mathbb{P}([X + Y = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x, X + Y = z]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X + Y = z, Y = y])$$

2. on remarque que :

$$[X = x, X + Y = z] = [X = x, x + Y = z] = [X = x, Y = z - x]$$

et de même

$$[Y = y, X + Y = z] = [Y = y, X + y = z] = [Y = y, X = z - y].$$

3. On obtient alors

$$\mathbb{P}([X + Y = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x, Y = z - x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = z - y, Y = y]).$$

On prendra bien garde au fait que $z - x$ n'est pas dans le support de Y pour toute valeur de x (de même pour $z - y$ avec le support de X).

Proposition 12.2 (Stabilité des lois de Poisson)

Soient $X_1, \dots, X_r$ des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** telles que :

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i) \quad \text{où } \lambda_i > 0.$$

Alors $X_1 + \dots + X_r \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)$.

12.3 Variance et covariance

12.3.1 Théorème de transfert

Théorème 12.1 (de transfert)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes **finies**.

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Alors $g(X, Y)$ possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} g(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

12.3.2 Covariance

Définition 12.5 (Covariance)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y possèdent un moment d'ordre 2. Alors

- X, Y et XY possèdent une espérance ;
- $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ possède une espérance que l'on appelle la **covariance de X et Y** et notée $\text{Cov}(X, Y)$.

Proposition 12.3 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y possèdent un moment d'ordre 2. Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

En particulier, si X et Y sont **indépendantes** alors

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Remarque 12.2. Le fait que $\text{Cov}(X, Y) = 0$ n'implique pas que X et Y sont indépendantes.

Proposition 12.4

Soient X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 des variables aléatoires discrètes ayant un moment d'ordre deux. Alors

1. Symétrie : $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$:
2. Linéarité à gauche :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y);$$

3. Linéarité à droite :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{Cov}(X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \lambda_2 \text{Cov}(X, Y_2);$$

4. $\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = \text{Cov}(a, X) = 0$.
5. $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.

Proposition 12.5 (Lien avec la variance)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. On suppose que X et Y ont un moment d'ordre deux. Alors $X + Y$ possède une variance et :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$