

BCPST2 – Mathématiques

MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

2H

Partie I. Quelques résultats utiles.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\sum_{k \geq 0} \frac{\lambda^k x^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$ et on reconnaît un multiple d'une série exponentielle de paramètre λx .

Ainsi la série converge et sa somme $S(x)$ est donc bien définie et vaut :

$$S(x) = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}.$$

2. La fonction g est dérivable en tant que somme et produit de fonctions dérivables et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g'(x) = (1-x)e^{-x}.$$

On en déduit le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
g	-1		-1

car $g(0) = -1$ et par croissance comparée $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$.

De plus, $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$ et comme g admet un maximum global en 1 on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) \leq g(1) < 0.$$

3. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in [0, 1]$ on a :

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$$

et

$$\varphi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} > 0.$$

En particulier, φ' est strictement croissante sur $[0, 1]$ et comme $\varphi'(1) = \lambda - 1 \leq 0$ on en déduit :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \varphi'(x) < 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(1) \leq 0.$$

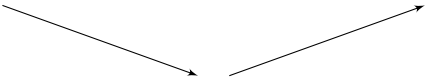
Ainsi φ est strictement décroissante sur $[0, 1]$. En particulier, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet au plus une solution sur $[0, 1]$.

Enfin, un calcul direct montre que $\varphi(1) = 0$ donc 1 est l'unique solution sur $[0, 1]$ de l'équation $\varphi(x) = 0$.

4. On a, de même que précédemment, φ' qui est strictement croissante sur $[0, 1]$.
Cependant, cette fois $\varphi'(1) = \lambda - 1 > 0$ et $\varphi'(0) = \lambda e^{-\lambda} - 1 = g(\lambda) < 0$ (d'après la question 1).

Comme φ' est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\varphi'(x) = 0$.

On a ainsi :

x	0	α	1
$\varphi'(x)$	-	0	+
φ			

De plus :

$$\varphi(0) = e^{-\lambda} > 0 \quad ; \quad \varphi(1) = 0 \quad \text{donc} \quad \varphi(\alpha) < 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ possède une unique solution sur $]0, \alpha[$ et une unique solution (1) sur $]\alpha, 1]$.

5. Cf cours.

6. On sait que $T_1(\Omega) = T_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(T_1 + T_2)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([T_1 = i])_{i \in \mathbb{N}}$, la série $\sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(T_1 + T_2 = k, T_1 = i)$ converge et on a :

$$\mathbb{P}(T_1 + T_2 = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 + T_2 = k, T_1 = i).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_1 + T_2 = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_1 + T_2 = k, T_1 = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(i + T_2 = k, T_1 = i) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 = k - i, T_1 = i) \\
 &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 = k - i) \mathbb{P}(T_1 = i)
 \end{aligned}$$

car T_1 et T_2 sont indépendantes.

Soit $i \in \mathbb{N}$.

— Si $k < i$ alors $k - i < 0$ donc $\mathbb{P}(T_2 = k - i) = 0$.

— Si $k \geq i$ alors $k - i \in \mathbb{N}$ donc $\mathbb{P}(T_2 = k - i) = e^{-t_2} \frac{t_2^{k-i}}{(k-i)!}$.

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T_1 + T_2 = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 = k - i) \mathbb{P}(T_1 = i) = \sum_{i=0}^k e^{-t_2} \frac{t_2^{k-i}}{(k-i)!} \mathbb{P}(T_1 = i) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} 0 \\
 &= \sum_{i=0}^k e^{-t_2} \frac{t_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-t_1} \frac{t_1^i}{i!} + 0 \\
 &= e^{-(t_1+t_2)} \sum_{i=0}^k \frac{1}{(k-i)! i!} t_2^{k-i} t_1^i \\
 &= \frac{e^{-(t_1+t_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)! i!} t_2^{k-i} t_1^i \\
 &= \frac{e^{-(t_1+t_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} t_2^{k-i} t_1^i \\
 &= \frac{e^{-(t_1+t_2)}}{k!} (t_1 + t_2)^k
 \end{aligned}$$

d'après le binôme de Newton.

Cela montre que $(T_1 + T_2)(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $T_1 + T_2$ suit la loi de Poisson de paramètre $t_1 + t_2$.

7. On procède par récurrence sur $n \geq 2$.

L'initialisation a été prouvée à la question précédente. Pour l'hérédité, on suppose

que $T = \sum_{k=1}^n T_k$ suit la loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$.

Alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_k = \sum_{k=1}^n T_k + T_{n+1} = T + T_n$$

avec

- T suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$,
- T_{n+1} suit une loi de Poisson de paramètre t_{n+1} ,
- d'après le lemme des coalitions, T et T_{n+1} sont indépendantes.

On peut donc appliquer la question précédente à T et T_{n+1} pour conclure que $T +$

T_{n+1} suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k + t_{n+1}$ ce qui montre l'hérédité.

8. Comme a est continue sur I , elle possède une primitive A sur I . Alors l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\mathcal{S}_1 = \{y : t \in I \mapsto C e^{A(t)} ; C \in \mathbb{R}\}.$$

9. Soit $f \in \mathcal{S}_1$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad f(t) = C e^{A(t)}.$$

Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$. Comme $e^{A(t_0)} > 0$ alors nécessairement $C = 0$ donc

$$\forall t \in I, \quad f(t) = C e^{A(t)} = 0.$$

10. Posons $y = g - C$ dérivable sur I car g l'est. Alors, comme g est solution de (E_2) :

$$y' = g' = bg(g - C) = bgy.$$

Donc y est bien solution de (E_3) .

11. Posons $a = bg$ et supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$. En conservant les notations de la question précédente, la fonction $y = g - C$ est alors une solution de $y' = ay$ qui s'annule en t_0 .

D'après la question **9**, on en déduit que y est la fonction nulle sur I , c'est-à-dire, g est constante égale à C sur I .

Partie II. Probabilité d'extinction d'une stratégie.

12. — Z_0 suit la loi certaine de paramètre 1 donc $p_0 = \mathbb{P}(Z_0 = 0) = 0$.

— Comme $Z_0 = 1$ alors $Z_1 = X_{0,1}$ suit une loi de poisson de paramètre λ donc :

$$p_1 = \mathbb{P}(Z_1 = 0) = e^{-\lambda}.$$

— L'expression de Z_2 dépend de la valeur de Z_1 . On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $([Z_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$: la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) \mathbb{P}(Z_1 = k)$ converge et :

$$p_2 = \mathbb{P}(Z_2 = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) \mathbb{P}(Z_1 = k).$$

Or, sachant que $[Z_1 = k]$ est réalisé, Z_2 est une somme de k variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ . Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(\sum_{i=1}^k X_{1,i} = 0) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k X_{1,i} = 0)$$

car les $X_{1,i}$ sont indépendantes de Z_1 .

Grâce à la question **7**, on sait que $\sum_{i=1}^k X_{1,i}$ suit la loi $\mathcal{P}(k\lambda)$ donc :

$$\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) = \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(\sum_{i=1}^k X_{1,i} = 0) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^k X_{1,i} = 0) = e^{-k\lambda}.$$

On obtient donc vu que Z_1 suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} p_2 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0) \mathbb{P}(Z_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{-\lambda})^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

- 13.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $[Z_n = 0]$ est réalisé alors la somme définissant Z_{n+1} est vide donc nulle d'après la convention rappelée.

Cela montre :

$$[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0]$$

puis par croissance de $\mathbb{P}$ on obtient

$$p_n \leq p_{n+1}.$$

Ainsi, (p_n) est croissante. Comme elle est majorée par 1 (les p_n sont des probabilités) d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

- 14.** Soit $n \in \mathbb{N}$. L'énoncé suggère d'appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$.

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) \mathbb{P}(Z_1 = k)$ converge et que :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) \mathbb{P}(Z_1 = k).$$

En utilisant le résultat admis dans l'énoncé et le fait que Z_1 suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a :

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_n^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = S(p_n).$$

- 15.** On a vu à la question **13** que la suite (p_n) converge. Notons ℓ sa limite.

On sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \in [0, 1]$ (c'est une probabilité!). Donc par passage à la limite dans les inégalités larges, on sait que $\ell \in [0, 1]$.

De plus :

- d'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \ell$;
- d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(p_n) = S(\ell) = f(\ell)$ car S est continue et égale à f d'après la question **1**.

Par unicité de la limite, on en déduit que $S(\ell) = \ell$ ou, grâce à l'expression trouvée en question **1**, $f(\ell) = \ell$.

- Si $\lambda \leq 1$, d'après la question **3**, on en déduit que $\ell = 1$.
- Si $\lambda > 1$, d'après la question **4**, on en déduit que $\ell = 1$ ou $\ell = x_\lambda$.

Il faut exclure le cas $\ell = 1$ pour conclure. La suite (p_n) étant croissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(p_n) = f(p_n) - p_n = p_{n+1} - p_n \geq 0$$

et avec le signe de φ obtenu en question **4**, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \in [0, x_\lambda] \cup \{1\}.$$

S'il existe un $n_0 \geq 1$ tel que $p_{n_0} = 1$ alors $f(p_{n_0-1}) = p_{n_0} = 1$ et comme 1 est l'unique antécédent de 1 par f (f est strictement croissante donc injective) alors $p_{n_0-1} = 1$ et de proche en proche on aurait $p_0 = 1$ ce qui est absurde. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \in [0, x_\lambda].$$

En particulier : $\ell \leq x_\lambda < 1$ ce qui permet d'exclure que $\ell = 1$ et conclure que $\ell = x_\lambda$.

- 16.** Le paramètre λ est le nombre moyen d'enfants de chaque individu suivant la nouvelle stratégie. Si $\lambda < 1$, il est cohérent de constater que la population tende à s'éteindre presque sûrement.

Partie III. Étude de deux exemples.

- 17.** Soit $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ et soit (x_1, x_2, x_3) un triplet de fonctions constantes égal à (C_1, C_2, C_3) .

(x_1, x_2, x_3) est solution de (2)

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = C_1(C_2 - C_3) \\ 0 = C_2(C_3 - C_1) \\ 0 = C_3(C_1 - C_2) \\ 1 = C_1 + C_2 + C_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_2 C_3 \\ 1 = C_2 + C_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} C_2 = C_3 \\ 0 = C_2(C_2 - C_1) \\ 1 = C_1 + 2C_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_2 \\ 1 = C_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_3 \\ 1 = C_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} C_2 = C_3 \\ 0 = C_2(C_2 - C_1) \\ 1 = C_1 + 2C_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_2 \\ 1 = C_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_3 \\ 1 = C_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} C_2 = C_3 \\ 0 = C_2 \\ 1 = C_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} C_2 = C_3 \\ C_2 = C_1 \\ 1 = 3C_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient donc quatre solutions : $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

- 18.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(M - \lambda I_3) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & -1-\lambda^2 \end{pmatrix} \right) \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad ; \quad L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -2 & 2-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & -1-\lambda^2 \end{pmatrix} \right) \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -2 & 2-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^3-3\lambda \end{pmatrix} \right) \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 + (1-\lambda)L_2)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \text{Spec}(M) \Leftrightarrow \text{rg}(M - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow -\lambda^3 - 3\lambda \Leftarrow \lambda \in \{0, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}.$$

Ainsi : $\text{Spec}(M) = \{0, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\}$.

On peut déjà remarquer que M , qui est d'ordre 3, possède trois valeurs propres complexes distinctes donc elle est diagonalisable et chacun des sous-espaces propres est de dimension 1.

Déterminons les sous-espaces propres : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

— $E_0(M)$.

$$X \in E_0(M) \iff \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

Ainsi $E_0(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est génératrice de $E_0(M)$ et que $\dim(E_0(M)) = 1$, c'est une base de $E_0(M)$.

— $E_{\sqrt{3}i}(M)$.

$$\begin{aligned} X \in E_{\sqrt{3}i}(M) &\iff \begin{cases} y - z = \sqrt{3}ix \\ -x + z = \sqrt{3}iy \\ x - y = \sqrt{3}iz \end{cases} \iff \begin{cases} i\sqrt{3}x - y + z = 0 \\ -x - i\sqrt{3}y + z = 0 \\ x - y - i\sqrt{3}z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (-1 + i\sqrt{3})y - 2z = 0 \\ -(1 + i\sqrt{3})y + (1 - i\sqrt{3})z = 0 \\ x - y - i\sqrt{3}z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque alors que $(1 - i\sqrt{3})L_2 = -2L_1$ d'où :

$$X \in E_{\sqrt{3}i}(M) \iff \begin{cases} (-1 + i\sqrt{3})y - 2z = 0 \\ x - y - i\sqrt{3}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}y \\ z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } E_{i\sqrt{3}}(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right) \text{ (cette der-}$$

nière expression s'obtient en multipliant le premier vecteur par le scalaire non nul $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ pour avoir un 1 en première coordonnée pour la question suivante).

On en déduit comme précédemment que $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est une base de

$E_{i\sqrt{3}}(M)$.

- Pour $E_{-i\sqrt{3}}(M)$ on peut faire des calculs similaire ou remarquer que, par linéarité de la conjugaison et comme M est à coefficients réels :

$$MX = i\sqrt{3}X \implies M\bar{X} = -i\sqrt{3}\bar{X}.$$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $-i\sqrt{3}$ donc, par le même argument que précédemment, forme une base de $E_{-i\sqrt{3}}(M)$.

- 19.** D'après la question précédente les matrices P et D suivantes conviennent :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix} ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

- 20.** Il y a plusieurs méthodes possibles :

- mettre le membre de droite au même dénominateur et identifier les coefficients du polynôme qui apparaît au numérateur avec le numérateur du membre de gauche.
- Soit A, B, C des réels vérifiant la condition demandée. En multipliant par x membre à membre on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3/4, 1\}, \quad \frac{1}{(x-1)(4x-3)} = A + \frac{Bx}{x-1} + \frac{Cx}{4x-3}$$

et en faisant tendre x vers 0 on obtient :

$$\frac{1}{3} = A.$$

De même, en multipliant membre à membre par $(x-1)$ puis en faisant tendre x vers 1 on obtient :

$$1 = B.$$

En multipliant membre à membre par $(4x-3)$ puis en faisant tendre x vers $3/4$ on obtient :

$$-\frac{16}{3} = C.$$

Réciproquement, on vérifie que $A = 1/3$, $B = 1$ et $C = -16/3$ conviennent bien.

- 21.** La fonction h est continue sur $]0, 3/4[$ donc possède des primitives sur cet intervalle. D'après la question précédente, les primitives de h sur $]0, 3/4[$ sont les fonctions

$$x \mapsto A \ln(x) + B \ln(1-x) + \frac{C}{4} \ln(3-4x) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

22. Posons $a = (x_1 - 1)(4x_1 - 3)$. Comme x_1 est solution de (4), cela signifie que :

$$x_1' = ax_1.$$

D'après la question **9**, si x_1 s'annule alors x_1 est nulle ce qui n'est pas possible car $x_1(0) > 0$.

Posons $b = 4(x_1 - 1)$. Comme x_1 est solution de (4), cela signifie que :

$$x_1' = bx_1(x_1 - 3/4).$$

D'après la question **11**, si x_1 prend la valeur $3/4$ alors x_1 est constante égale à $3/4$ ce qui n'est pas possible car $x_1(0) < 3/4$.

Ainsi x_1 ne peut prendre ni la valeur 0 ni la valeur $3/4$.

Supposons maintenant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_1(t_0) \notin]0, 3/4[$.

- si $x_1(t_0) \leq 0$, comme $x_1(0) > 0$ alors par le TVI (x_1 est continue car dérivable), x_1 s'annulerait ; ce qui contredit ce qui précède.
- si $x_1(t_0) \geq 3/4$, comme $x_1(0) < 3/4$ alors par le TVI (x_1 est continue car dérivable), x_1 prendrait la valeur $3/4$; ce qui contredit ce qui précède.

Dans les deux cas on aboutit à une contradiction.

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x_1(t) \in]0, 3/4[$.

23. D'après la question précédente, $x_1(x_1 - 1)(4x_1 - 3)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. Donc :

$$\begin{aligned} x_1 \text{ solution de (4)} &\iff x_1' = x_1(x_1 - 1)(4x_1 - 3) \iff \frac{x_1'}{x_1(x_1 - 1)(4x_1 - 3)} = 1 \\ &\iff x_1' h(x_1) = 1. \end{aligned}$$

Avec la question **21** et la formule de primitivation des fonctions composées on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$A \ln(x_1(t)) + B \ln(1 - x_1(t)) + \frac{C}{4} \ln(3 - 4x_1(t)) = t + k.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Compte tenu des valeurs de A , B et C on a

$$\begin{aligned} A \ln(x_1(t)) + B \ln(1 - x_1(t)) + \frac{C}{4} \ln(3 - 4x_1(t)) &= \frac{1}{3} \ln(x_1(t)) + \ln(1 - x_1(t)) - \frac{16}{12} \ln(3 - 4x_1(t)) \\ &= \frac{1}{3} (\ln(x_1(t)) + 3 \ln(1 - x_1(t)) - 4 \ln(3 - 4x_1(t))) \\ &= \frac{1}{3} (\ln(x_1(t)(1 - x_1(t))^3) - \ln((3 - 4x_1(t))^4)) \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1 - x_1(t))^3}{(3 - 4x_1(t))^4} \right) \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1 - x_1(t))^3}{(3/4 - x_1(t))^4} - 4 \ln(4) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1 - x_1(t))^3}{(3/4 - x_1(t))^4} \right) = t + D$$

où on a posé $D = k + \frac{4}{3} \ln(4)$.

24. On remarque que d'après la question **22**, $x_1' = x_1(x_1 - 1)(4x_1 - 3) \geq 0$ donc x_1 est croissante.

De plus, x_1 est majorée (question **22**) donc elle possède une limite finie en $+\infty$, notée ℓ . Toujours par la question **22** et par croissance, on sait que $\ell \in [x_1(0), 3/4] \subset]0, 3/4]$.

Supposons que $\ell \in]0, 3/4[$. Alors on a :

$$+\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} t + D = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x_1(t)(1 - x_1(t)^3)}{(3/4 - x_1(t))^4} \right) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\ell(1 - \ell)^3}{(3/4 - \ell)^4} \right) \in \mathbb{R}$$

ce qui est absurde.

Donc $\ell = \frac{3}{4}$.