

Mathématiques – TD15

THÉORÈMES LIMITES EN PROBABILITÉ

1 Autour de la loi des grands nombres

Exercice 1. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \geq 1$, on note

$$Y_n = X_n X_{n+1}.$$

1. Pour $n \geq 1$, donner la loi de Y_n , $\mathbb{E}(Y_n)$, $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^*$, calculer $\text{Cov}(Y_i, Y_j)$.
3. Soit $S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$ pour $n \geq 1$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n - p^2| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p = \frac{1}{6}$. On lance n fois un dé équilibré et on considère S_n le nombre de fois où 6 est sorti durant les n premiers tirages. On pose $Y_n = \exp\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n .
2. Prouver : $\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^p$ et $\mathbb{V}(Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$\mathbb{P}(|Y_n - e^p| < \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoire suivant la même loi qu'une variable X . On suppose que X admet un moment centré d'ordre 4, $\mu_4 = \mathbb{E}((X - \mu)^4)$ où $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, l'espérance empirique et la variance empirique non-biaisée du N -échantillon $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ sont définies respectivement par :

$$M_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \quad \text{et} \quad \Sigma_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_n - M_N)^2.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(\Sigma_N^2) = \mathbb{V}(X)$.
2. On admet que

$$\mathbb{V}(\Sigma_N^2) = \frac{1}{N} \mu_4 - \frac{(N-3)}{N(N-1)} \mathbb{V}(X)^2.$$

Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|\Sigma_N^2 - \mathbb{V}(X)| > \epsilon) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

3. (Facultatif) Démontrer la formule admise en 2.

2 Convergence en loi

Exercice 4.

1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0, 1])$.
 - (a) Montrer que $(\max(X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi certaine.
 - (b) Montrer que $(\min(X_1, \dots, X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi certaine.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(e^{-1})$.
3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]\right)$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer F_{X_n} en fonction la fonction de répartition Φ d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = 1$ si $t > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(t) = 0$ si $t < 0$.
3. En déduire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi certaine.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0, n])$. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition F_{Y_n} .
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x)$.
3. En déduire que $(Y_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 7.

1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable à déterminer.
2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de loi certaine égale à 0.

3 Théorème central limite

Exercice 8. On considère trois variables aléatoires X , Y et Z mutuellement indépendantes et suivant toutes les trois la loi binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$.

On pose $R = \frac{1}{3}(X + Y + Z)$.

1. Quelle est la loi de $X + Y + Z$?
2. Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On donne $\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \simeq 0,86$. Donner une valeur approchée de $P(R \geq 4)$.

Exercice 9. On considère 1000 variables aléatoires $T_1, \dots, T_{1000}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la même loi, indépendantes, ayant une espérance égale à 3 et une variance égale à $\frac{1}{2}$.

On pose $S = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} T_i$.

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée $\Phi(\sqrt{5}) \simeq 0,978$.

Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}(2,95 < S \leq 3,05)$.

Exercice 10. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad u_n = e^{-n} \sum_{i=1}^n \frac{n^i}{i!}.$$

1. Donner la loi de S_n , son espérance et sa variance.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n à l'aide de la variable S_n .
3. En déduire, en appliquant le théorème central limite, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une limite et la déterminer.

Exercice 11. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[0, 1]$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Quelle est la limite (si elle existe) quand $n \rightarrow +\infty$ de $\mathbb{P}\left(\frac{n}{2} - \sqrt{n} < S_n \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n}\right)$?

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable, d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 > 0$.

On suppose que si X_1 et X_2 sont indépendantes, de même loi que X alors $\frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$ suit également la loi de X .

1. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de même loi que X et indépendantes. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sum_{k=1}^{2^n} X_k}{\sqrt{2^n}}$ suit la loi de X .
2. Montrer en utilisant le TCL que X suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

4 Tests

Exercice 13. On suppose qu'une naissance (d'être humain) est une expérience aléatoire dont la caractéristique X première est le fait d'obtenir un garçon ou une fille. On obtient une fille (succès !) avec probabilité p et un garçon (échec !) avec probabilité $q = 1 - p$:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad ; \quad \mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p.$$

En 2016 selon l'INSEE, sur les 746977 naissances, 364 392 sont des femmes et 382 585 des hommes. L'hypothèse $(H_0) : p = \frac{1}{2}$ est-elle conforme au niveau de confiance 95% avec l'observation ?

Exercice 14. Chez des sujets normaux, le dosage de l'activité d'une enzyme suit une loi normale d'espérance 10.7 et d'écart-type 2.7.

Une série de dosages effectuées sur une même personne a donné :

$$12.9 - -8.7 - -9.0 - -1.2 - -2.7 - -9.7 - -9.1 - -10.3$$

Cette personne a-t-elle un dosage normal ?