

PRODUIT SCALAIRE SUR \mathbb{R}^n

Dans tout le chapitre, n désigne un entier naturel non nul.

14.1 Produit scalaire, norme, distance

14.1.1 Produit scalaire

Définition 14.1

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

On appelle **produit scalaire canonique** de x et de y et on note $\langle x, y \rangle$ le nombre réel défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Remarque 14.1. On rencontre parfois les notations suivantes pour désigner le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\langle x|y \rangle \quad ; \quad (x, y) \quad ; \quad (x|y) \quad ; \quad x \cdot y.$$

Proposition 14.1 (Expression matricielle)

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

On pose $X = \text{Mat}_{\text{base canonique}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\text{base canonique}}(y)$.

Alors : $\langle x, y \rangle = ({}^t X)Y$.

Remarque 14.2. Par extension, on peut définir le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en posant, pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = ({}^t X)Y.$$

Proposition 14.2 (Propriétés du produit scalaire)

1. **Symétrie** : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. **Bilinéarité** : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$$

et

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle.$$

3. **Positivité** : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Corollaire 1

Soient $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q$ des vecteurs de \mathbb{R}^n et $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$ des scalaires. Alors

$$\left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^q \mu_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j \langle x_i, y_j \rangle.$$

14.1.2 Norme et distance

Définition 14.2

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

On appelle norme de x et on note $\|x\|$ le réel positif défini par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Proposition 14.3 (Propriétés de la norme)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
2. **Identités remarquables** : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad ; \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

et

$$\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

Définition 14.3

Un vecteur est dit **normé** ou **unitaire** si sa norme vaut 1.

Exemple 14.1. Si x est un vecteur **non nul** alors $\frac{1}{\|x\|}x$ est normé.

Théorème 14.1 (Inégalité Cauchy-Schwarz)

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

ou de manière équivalente :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

De plus, il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Proposition 14.4 (Inégalité triangulaire)

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\|x + y\| \leq \|y\| + \|x\|$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est positivement liée (liée par une relation linéaire à coefficients positifs).

Définition 14.4 (Distance)

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$.

La distance entre x et y , notée $d(x, y)$, est le réel positif défini par :

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proposition 14.5

1. **Symétrie** : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$.
2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
3. **Inégalité triangulaire** : pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

14.2 Orthogonalité

14.2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 14.5

1. Deux vecteurs de \mathbb{R}^n sont dits **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul.
2. Une famille de vecteurs est dite **orthogonale** si elle est formée de vecteurs deux à deux orthogonaux.
3. Une famille de vecteurs est dite **orthonormée** ou **orthonormale** si elle est orthogonale et formée de vecteurs normés.

Proposition 14.6

Toute famille orthogonale formée de vecteurs **non nuls** est libre.

Théorème 14.2 (Pythagore)

Soit (u_1, \dots, u_p) une famille orthogonale de vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

14.2.2 Base orthogonale
Définition 14.6

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

1. Une base orthogonale de F est une base de F qui est une famille orthogonale.
2. Une base orthonormée de F est une base de F qui est une famille orthonormée.

Exemple 14.2. 1. La base canonique de \mathbb{R}^n est une base orthonormée.

2. Si (e_1, \dots, e_p) est une base orthogonale de F alors $\left(\frac{1}{\|e_1\|} e_1, \dots, \frac{1}{\|e_p\|} e_p \right)$ est une base orthonormée de F .

Théorème 14.3 (Coordonnées en base orthonormée)

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F . Pour tout $x \in F$ on a :

$$x = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Autrement dit, les coordonnées de $x \in F$ dans la base \mathcal{B} sont $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_p \rangle)$.

Théorème 14.4 (Produit scalaire en base orthonormée)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ dans la base \mathcal{B} .

Alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Remarque 14.3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n .

1. La différence entre ce théorème et la définition réside dans le fait qu'ici $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ ne sont pas les coordonnées dans la base canonique mais dans la base \mathcal{B} .

2. De manière équivalente :

— (avec le théorème 14.3) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$.

— (version matricielle) $\langle x, y \rangle = ({}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

3. Si $P = \text{Mat}_{\text{base canonique}(\mathcal{B})}$ alors $({}^t P)P = I_n$.

14.2.3 Orthogonal d'une sous-espace vectoriel

Définition 14.7

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

L'orthogonal de F est le sous-ensemble de \mathbb{R}^n noté F^\perp défini par :

$$F^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F .

Proposition 14.7

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

1. F^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ;
2. $\dim(F^\perp) + \dim(F) = n$;
3. $(F^\perp)^\perp = F$;
4. Si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors $F^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle e_i, y \rangle = 0\}$.

Remarque 14.4. La dernière propriété est à savoir redémontrer.

14.3 Projection orthogonale

14.3.1 Projection orthogonale

Définition 14.8

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_F + x_{F^\perp}$.
- L'application $p_F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui à tout $x \in \mathbb{R}^n$ associe x_F est une application linéaire appelée la projection orthogonale sur F .

Remarque 14.5 (Importantes). Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Le projeté $p_F(x)$ est caractérisé par :

- $p_F(x) \in F$
- $x - p_F(x) \in F^\perp$.

Ainsi, en pratique pour déterminer $p_F(x)$ on résout le système suivant d'inconnu y :

$$\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$

2. On a

- $p_F(x) = x \iff x \in F$
- $p_F(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff x \in F^\perp$.

Proposition 14.8

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Proposition 14.9

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . La projection orthogonale sur F est l'unique endomorphisme f de \mathbb{R}^n vérifiant :

1. $f \circ f = f$
2. $\text{Im}(f) = F$
3. $\text{ker}(f) = F^\perp$.

14.3.2 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 14.9

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $x \in \mathbb{R}^n$. On appelle distance de x à F le réel positif défini par :

$$d(x, F) = \inf\{d(x, f) ; f \in F\}.$$

Théorème 14.5

Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et $x \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

De plus, $p_F(x)$ est l'unique vecteur $f \in F$ pour lequel $d(x, F) = d(x, f)$.

14.4 Théorème spectral

Proposition 14.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et x, y deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes.

Alors x et y sont orthogonaux.

Théorème 14.6 (Théorème spectral)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

Alors A est diagonalisable en base orthonormée.

Cela signifie qu'il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A ou, de manière équivalente, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que ${}^t(P)P = I_n$ vérifiant

$$A = PDP^{-1} = PD({}^tP).$$

Méthode 14.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

Pour déterminer les matrices P et D ci-dessus on procède de la façon suivante :

- la matrice D s'obtient comme au chapitre 13.
- la matrice P s'obtient comme au chapitre 13 à ceci près qu'au lieu d'utiliser des bases quelconques des sous-espaces propres, on utilise des bases orthonormées.