

## BCPST2 – Mathématiques

## DS6

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ... doivent être mis en valeurs.*

## Modèle de diffusion d'Ehrenfest

On considère deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  contenant à elles deux  $N \in \mathbb{N}^*$  boules.

À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et  $N$ . Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne  $U_1$  alors on met une boule de l'urne  $U_1$  dans l'urne  $U_2$ ; sinon, on met une boule de l'urne  $U_2$  dans l'urne  $U_1$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne  $U_1$  à l'étape  $n$ . La variable  $X_0$  est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne  $U_1$ , la variable  $X_1$  est égale au nombre de boules présentes dans l'urne  $U_1$  après un échange, ...

**Exemple :** si l'urne  $U_1$  contient initialement 3 boules et l'urne  $U_2$  en contient 2 alors  $N = 5$  et  $X_0 = 3$ .

On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2 alors on met une boule de l'urne  $U_1$  dans l'urne  $U_2$  et l'on a  $X_1 = 2$ . On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3 alors on met une boule de l'urne  $U_2$  dans l'urne  $U_1$  et l'on a  $X_2 = 3$ . On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange on aura  $X_3 = 2$  avec une probabilité de  $\frac{3}{5}$  et  $X_3 = 4$  avec une probabilité de  $\frac{2}{5}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$ . Ainsi :  $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, Y_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k)$ .

## Partie 1 – Matrice de transition

1. On suppose, **dans cette question uniquement**, que  $N = 2$ .

(a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ ,  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$  et  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$  en fonction de  $\mathbb{P}(X_n = 0)$ ,  $\mathbb{P}(X_n = 1)$  et  $\mathbb{P}(X_n = 2)$ .

(b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $Y_{n+1} = A_2 Y_n$  où  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

*Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.*

(c) Déterminer les valeurs propres de  $A_2$  et une base de chaque sous-espace propre.

- (d) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A_2 = PDP^{-1}$ .

Dans la suite  $N \in \mathbb{N}^*$  est fixé.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = 1) \quad ; \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = N) = \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = N - 1)$$

et pour tout  $k \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{N - k + 1}{N}\mathbb{P}(X_n = k - 1) + \frac{k + 1}{N}\mathbb{P}(X_n = k + 1).$$

3. On considère la matrice de  $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1/N & 0 \end{pmatrix}.$$

Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = AY_n$ .

*Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.*

4. On note  ${}^tA$  la matrice transposée de  $A$ .  
Déterminer lorsque  $N = 2$  et  $N = 3$ , l'espace propre associé à la valeur propre 1 de  ${}^tA$ .
5. Prouver que, dans le cas général, la matrice  ${}^tA$  possède 1 comme valeur propre.
6. En déduire que la matrice  ${}^t(A - I_{N+1})$  est non inversible puis que la matrice  $A$  possède 1 comme valeur propre.

## Partie 2 – Détermination de l'espérance de la variable aléatoire $X_n$

Dans la suite  $n \in \mathbb{N}^*$  est fixé.

7. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire  $X_{n+1} - X_n$  ?
8. En déduire que  $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)$ .  
*Indication : on pourra utiliser le système complet d'événements  $([X_n = k])_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ .*
9. En déduire l'expression de  $\mathbb{E}(X_n)$  en fonction de  $n$  et de  $\mathbb{E}(X_0)$ .
10. On suppose  $N > 2$ . Déterminer la limite de  $\mathbb{E}(X_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  et en donner une interprétation.

### Partie 3 – Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question à l'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre 1, que l'on notera  $E_1$ .

11. Soit  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$ .

Prouver que pour tout  $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $x_k = \binom{N}{k} x_0$ .

12. En déduire la dimension de  $E_1$ .

13. Calculer la somme  $S = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}$ .

14. Prouver qu'il existe un unique vecteur  $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$  tel que  $\sum_{k=0}^N \pi_k = 1$ .

On donnera son expression.

15. On considère la variable aléatoire  $X_\infty$  telle que :

$$X_\infty(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

Quelle est la loi suivie par  $X_\infty$ ? Donner son espérance, sa variance.

16. On suppose que  $X_0$  suit la même loi que  $X_\infty$ .

Déterminer la loi de  $X_n$  pour tout entier  $n$  et donner une interprétation.

### Partie 4 – Informatique

On suppose importé le module `numpy.random` sous le label `rd`.

La commande `rd.randint(a,b)`, avec  $a$  et  $b$  des entiers naturels tels que  $a < b$ , simule alors une variable aléatoire de loi uniforme sur  $\llbracket a, b-1 \rrbracket$ .

17. Écrire une fonction d'entête `ehrenfest(N,X0,n)` où

- $N$  est un entier naturel non nul donnant le nombre de boule total ;
- $X_0$  est un entier naturel donnant le nombre de boule dans  $U_1$  initialement ;
- $n$  est un entier naturel

qui simule la variable aléatoire  $X_n$ .