Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2025-2026

BCPST2 – Mathématiques

DM 5 – À rendre le 03/04/2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, …doivent être mis en valeurs.

Modèle de diffusion d'Ehrenfest

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux $N \in \mathbb{N}^*$ boules.
À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, …

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad Y_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k).$$

Partie 1 – Matrice de transition

1. On suppose, **dans cette question uniquement**, que $N = 2$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$, on a pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = 2).$$

— Si $[X_{n+1} = 0]$, c'est forcément qu'à l'étape précédente on avait une boule qu'on a retirée et donc que le nombre choisit valait 1. Ainsi

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) = P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) = 0 \quad ; \quad P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1).$$

— Si $[X_{n+1} = 1]$, c'est qu'à l'étape précédente soit qu'on avait deux boules auquel cas on en retire une avec probabilité 1, soit qu'on avait aucune boule auquel cas on en ajoute une avec probabilité 1. Ainsi

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) = 1 \quad ; \quad P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = 0.$$

D'où
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}(X_n=2).$$

— Si $[X_{n+1}=2]$, c'est qu'à l'étape précédente on avait une boule et qu'on en a ajouté une. Le nombre choisit doit alors être 2 ce qui arrive avec probabilité 1/2. Ainsi
$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=2)=P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=2)=0 \quad ; \quad P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}.$$
D'où
$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1).$$

(b) Ainsi, on a bien $Y_{n+1}=A_2Y_n$ où $A_2=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

(c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
rg(A_2-\lambda I_3)=rg\begin{pmatrix}-\lambda & 1/2 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2 & -\lambda\end{pmatrix} &= rg\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ -\lambda & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & -\lambda\end{pmatrix} \quad (L_1\leftrightarrow L_2)\\
&= rg\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2-\lambda^2 & \lambda\\ 0 & 1/2 & -\lambda\end{pmatrix} \quad (L_2\leftarrow L_2+\lambda L_1)\\
&= rg\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2-\lambda^2 & \lambda\\ 0 & 1-\lambda^2 & 0\end{pmatrix} \quad (L_3\leftarrow L_3+\lambda L_2)\\
&= rg\begin{pmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 0 & \lambda & 1/2-\lambda^2\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2\end{pmatrix} \quad (C_3\Leftrightarrow C_2)
\end{aligned}$$

Ainsi :
$$\lambda\in\operatorname{Spec}(A_2)\iff rg(A_2-\lambda I_3)<3\iff\lambda=0 \quad\text{ou}\quad 1-\lambda^2=0.$$

Donc $\operatorname{Spec}(A_2)=\{-1,0,1\}$.
Comme A_2 est une matrice 3×3 avec trois valeurs propres distinctes on sait que A_2 est diagonalisable et que la dimension de chaque sous-espace propre vaut 1.
On vérifie facilement que :

— $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_0(A_2)$,

— $\left(\begin{pmatrix}1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A_2)$,

— $\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-1}(A_2)$.

(d) On a déjà justifié que A_2 est diagonalisable et avec les calculs précédents, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on a bien $A_2 = PDP^{-1}$.

Dans la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in [\![0,N]\!]}$, on a pour tout $k \in [\![0,N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{[X_n = i]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = i).$$

Or, d'une étape à l'autre soit on ajoute une boule soit on retire une boule donc :

— si $[X_{n+1} = 0]$, c'est forcément qu'à l'étape précédente on avait une boule qu'on a retirée et donc que le nombre choisit valait 1. Ainsi

$$\forall i \in [\![0,N]\!], \quad P_{[X_n = i]}(X_{n+1} = 0) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{N} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = 1).$$

Or $\dfrac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = 1)$ correspond bien au premier coefficient de AY_n.

— Si $[X_{n+1} = k]$ avec $k \in [\![1, N-1]\!]$, c'est qu'à l'étape précédente soit qu'on avait $k-1$ boules et qu'on en a ajoutée une (cela arrive si l'on tire une nombre entre k et N) soit qu'on avait $k+1$ boules et qu'on en a retirée une (cela arrive si l'on tire une nombre entre 1 et $k+1$,). Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1).$$

Or $\dfrac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1)$ correspond bien au $k+1$-ième coefficient de AY_n.

— Si $[X_{n+1} = N]$, c'est qu'à l'étape précédente on avait $N-1$ boule et qu'on en a ajouté une. Le nombre choisit doit alors être N ce qui arrive avec probabilité $1/N$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = N) = \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = N-1).$$

Or $\dfrac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = N-1)$ correspond bien au $N+1$-ième coefficient de AY_n.

3. Avec la question précédente, on obtient bien $Y_{n+1} = AY_n$ avec la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dfrac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \dfrac{N-1}{N} & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1/N & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Pour $N = 2$, il s'agit de la transposée de la matrice A_2 de la question 1 :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in E_1({}^tA) \iff \begin{cases} y & = x \\ \dfrac{1}{2}(x+z) & = y \\ y & = z \end{cases} \iff x = y = z.$$

Ainsi $E_1({}^tA) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour $N = 3$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in E_1({}^tA) \iff \begin{cases} y & = x \\ 1/3x + 2/3z & = y \\ 2/3y + 1/3t & = z \\ z & = t \end{cases} \iff x = y = z = t.$$

Ainsi $E_1({}^tA) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

5. Il suffit de vérifier que

$$ {}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. $$

Cela montrera que 1 est valeur propre de ${}^tA$ et que $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
Il s'agit d'un simple calcul.
On peut aussi remarquer ${}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donne le vecteur dont les coordonnées sont la somme des coefficients de chaque ligne de ${}^tA$ donc de chaque colonne de A.

6. La matrice ${}^t(A - I_{N+1}) = {}^t A - I_{N+1}$ est non inversible d'après la question précédente. Or $A - I_{N+1}$ est de même rang que sa transposée ${}^t(A - I_{N+1})$ et comme cette dernière est non-inversible son rang est strictement inférieur à $N+1$. Par conséquent $A - I_{N+1}$ est non inversible ce qui est équivalent à dire que 1 est une valeur propre de A.

Partie 2 – Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

Dans la suite $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

7. À chaque étape, soit on ajoute une boule dans l'urne soit on retire une boule. Donc la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$ ne peut prendre que les valeurs -1 et 1.

8. On a donc :

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1).$$

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in [\![0,N]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) &= \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) \\
&= \sum_{k=0}^{N} (\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} - X_n = -1))\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} (\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) - \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k-1))\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{N-1} (\frac{N-k}{N} - \frac{k}{N})\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X_n = N) \\
&= \mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{N-1} (1 - \frac{2k}{N})\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X_n = N) \\
&= \sum_{k=0}^{N} (1 - \frac{2k}{N})\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) - \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= 1 - \frac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)
\end{aligned}$$

9. Avec la question précédente et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = 1 - \frac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)$$

d'où

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{N-2}{N}\mathbb{E}(X_n).$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n))_n$ est donc arithmético-géométrique et on obtient :

$$\mathbb{E}(X_n) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}.$$

10. On suppose $N > 2$. On a alors $0 < \dfrac{N-2}{N} < 1$ donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{N-2}{N}\right)^n = 0$$

donc
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{N}{2}.$$
Après un temps long, en moyenne les deux urnes contiennent le même nombre de boules.

Partie 3 – Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question à l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, que l'on notera E_1.

11. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Comme $AX = X$, on a :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{N} x_1 \\ x_k &= \frac{N-k+1}{N} x_{k-1} + \frac{k+1}{N} x_{k+1} \quad \forall k \in [\![1, N-1]\!] \\ x_N &= \frac{1}{N} x_{N-1} \end{aligned}$$

Prouvons par récurrence double finie que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \binom{N}{k} x_0$.

— Initialisation : on a bien $x_1 = N x_0 = \binom{N}{1} x_0$.

— Hérédité : soit $k \in [\![1, N-1]\!]$ et supposons que $x_k = \binom{N}{k} x_0$ et $x_{k-1} = \binom{N}{k-1} x_0$.

— Si $k \neq N-1$, alors $x_k = \frac{N-k+1}{N} x_{k-1} + \frac{k+1}{N} x_{k+1}$ donc :

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{N} x_{k+1} = x_k - \frac{N-k+1}{N} x_{k-1} &= \binom{N}{k} x_0 - \frac{N-k+1}{N} \binom{N}{k-1} x_0 \\ &= \frac{N!}{(N-k)!} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{N(k-1)!} \right) x_0 \\ &= \frac{N!}{(N-k)!} \frac{N-k}{Nk!} x_0. \end{aligned}$$

D'où

$$x_{k+1} = \frac{N!}{(N-k-1)!(k+1)!} x_0 = \binom{N}{k+1} x_0.$$

— Si $k = N-1$ alors

$$x_{k+1} = x_N = \frac{1}{N} x_{N-1} = \frac{1}{N} \binom{N}{N-1} x_0 = x_0 = \binom{N}{N} x_0$$

Ainsi, l'hérédité est prouvée.

— Conclusion : on a montré que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \binom{N}{k} x_0$.

12. D'après la question précédente :

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \binom{N}{k} \\ \vdots \end{pmatrix}\right)$$

donc $\dim(E_1) = 1$.

13. Par la formule du binôme de Newton $S = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$.

14. Soit $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$. Alors, d'après la question 11, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad \pi_k = \lambda \binom{N}{k}.$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1 \iff \sum_{k=0}^{N} \lambda \binom{N}{k} = 1 \iff \lambda = \frac{1}{2^N}.$$

Ainsi l'unique vecteur π vérifiant les conditions est donné par :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad \pi_k = \frac{\binom{N}{k}}{2^N}.$$

15. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!] \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

D'après la question précédente, on constate que X_∞ suit la loi $\mathcal{B}(N, 1/2)$.

16. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞. Alors $Y_0 = \pi$ et comme $A\pi = \pi$, la question 2 et une récurrence immédiate donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \pi.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(N, 1/2)$.

Partie 4 – Informatique

17.
```
def ehrenfest(N,X0,n):
    U1= X0
    U2= N-X0
    for k in range(n):
        nombre = rd.randint(1,N+1)
        if nombre <= U1:
            U1 = U1-1
            U2 = U2+1
        else:
            U1 = U1+1
            U2 = U2-1
    return U1
```