Méthodes et preuves à connaitre

Il s'agit d'une liste **non-exhaustive**.

Équivalents et DL

1. **Méthodes** :
   — Trouver un DL par la formule de Taylor-Young.
   — Déterminer des limites/lever des indéterminations de suites/fonctions. Trouver un équivalent d'une suite/fonction.
   — Trouver un DL d'une fonction. Étudier localement une fonction à l'aide d'un DL.
2. **Question classique** : limite quand n tend vers $+\infty$ de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ (avec $x>0$ fixé).

1 Chapitre 1-Fonctions de deux variables

1. **Méthodes** :
   — Montrer qu'une fonction de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
   — Trouver les points critiques et déterminer leur nature.

2 Chapitre 2-Intégrales généralisées

1. **Méthodes** :
   — Étudier la nature d'une intégrale généralisée multiple avec rigueur.
   — Étudier la nature d'une intégrale généralisée par comparaison ou équivalent.
   — Réaliser une IPP correctement justifiée.
   — Réaliser un changement de variable correctement justifié.
   — Connaître et reconnaître les primitives usuelles.

3 Chapitre 3-Polynômes

1. **Méthodes** :
   — Principe d'identification des coefficients de polynôme.
   — Factoriser un polynôme à partir de racines.
2. **Question classique** :
   — Trouver a, b tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$.
   — Les variantes de la questions ci-dessus.

4 Chapitre 4-Équations différentielles

1. **Méthodes** :
   - Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (solution de l'équation homogène et variation de la constante).
   - Résoudre une équation différentielle d'ordre 2 homogène à coefficients constants.
   - Résoudre une équation différentielle par changement de fonction (le changement de fonction est donné).
   - Résoudre une équation différentielle par séparation des variables.
2. **Questions classiques** :
   - Donner les solutions de $y' = ay$ ou $y' + ay = 0$ (sans erreur !!!)
   - Résoudre $y' = y(y+1)$ (utilise la question classique du chapitre précédent).
   - Les variantes de la question ci-dessus.
   - Programmer la méthode d'Euler.

5 Chapitres 5 et 6-Espaces vectoriels

1. **Méthodes** :
   - Montrer qu'un ensemble est un SEV d'un espace vectoriel à l'aide de la caractérisation.
   - Trouver une famille génératrice d'un SEV ("mettre sous forme de Vect").
   - Montrer qu'une famille est libre.
   - Trouver une base d'un SEV.
   - Montrer qu'un ensemble est un SEV d'un espace vectoriel à l'aide de la caractérisation.
   - Montrer qu'une famille est une base en utilisant un argument de dimension.
   - Calculer le rang d'une famille de vecteurs.
   - Extraire une base d'une famille génératrice.
2. **Question classique** : trouver une base d'un sous-espace vectoriel défini par un système d'équations (typiquement, un sous-espace propre d'une application linéaire).

6 Chapitre 7-Séries

1. **Méthodes** :
   - Déterminer la nature et en cas de convergence la somme d'une série s'exprimant comme combinaison linéaire des séries de référence.
   - Déterminer la nature d'une série à termes positifs par comparaison ou équivalence.
   - Utiliser la convergence absolue pour étudier la nature d'une série dont le terme général n'est pas positif.
2. **Preuves à connaître :**
   (a) Critère de convergence et somme des séries géométriques, géométriques dérivées premières et secondes. Preuve (seulement pour les séries géométriques).
   (b) Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ par comparaison avec une intégrale.

3. **Question classique** : nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ ou variantes par comparaison avec une intégrale (guidée par des questions intermédiaires).

7 Chapitre 8-Concepts de base en probabilités

1. **Méthodes** :
   — Savoir appliquer la formule des probabilités totales.

8 Chapitre 9-Variables aléatoires à densité

1. **Méthodes** :
   — Montrer qu'une fonction est une densité de probabilité.
   — Montrer qu'une variable aléatoire est à densité, déterminer une densité à partir de la fonction de répartition (et vice-versa).
   — Étudier l'existence de l'espérance, de la variance d'une variable à densité.
   — Sur des exemples simples, étude de variables de la forme $f(X)$ où X est à densité, d'une somme de variables à densité indépendantes.
2. **Preuves à connaître :**
   (a) Absence de mémoire de la loi exponentielle (proposition 9.11 du polycopié).
3. **Questions classiques** :
   — Formule d'inversion pour la loi exponentielle : si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ et $X = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$ montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
   — Trouver la fonction de répartition, une densité de $\max(X_1, \dots, X_n)$ ou $\min(X_1, \dots, X_n)$ pour des variables $X_1, \dots, X_n$ indépendantes de lois données (ex : exponentielles).

9 Chapitre 10-Applications linéaires

1. **Méthodes** :
   — Montrer qu'une application est linéaire ; déterminer une base de son noyau, de son image.
   — Étudier l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire.
   — Étudier une application linéaire (noyau, image, *etc*) via une matrice représentative.
   — Savoir utiliser le théorème du rang et ses conséquences.
2. **Questions classiques** :
   — Étudier une application linéaire via une matrice représentative.
   — Déterminer la matrice représentative d'une application linéaire dans une base donnée.
   — Justifier qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective.

10 Chapitre 11-Variables aléatoires discrètes

1. **Méthodes** :
   - Reconnaître les lois usuelles via les expériences de référence.
   - Savoir étudier l'existence (et le cas échéant calculer) de l'espérance, la variance d'une VAD.
   - Savoir justifier que la donnée d'une famille de réels distincts $(x_i)_{i\in I}$, de $(p_i)_{i\in I}$ définissent bien la loi d'une VAD.
   - Savoir déterminer la loi d'une VAD décrite par une expérience aléatoire.
2. **Preuves à connaître :**
   (a) Lois usuelles : loi (+preuve), espérance (+preuve), variance et expérience de référence (+preuve).
   (b) Absence de mémoire de la loi géométrique (proposition 11.10 du polycopié).

11 Chapitre 12-Couples de variables aléatoires discrètes

1. **Méthodes** :
   - **Savoir utiliser la formule des probabilités totales ! !**
   - Trouver les lois marginales à partir de la loi jointe ou de la donnée d'une marginale et des lois conditionnelles (formule des probabilités totales).
   - Sur des exemples simples, étude de variables aléatoires de la forme $g(X,Y)$ avec (X,Y) un couple de variables discrètes, notamment $X+Y$, $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$.
2. **Preuves à connaître :**
   (a) Sommes de variables indépendantes de loi de Poisson.
3. **Questions classiques** :
   - La partie 2 du sujet Méthodes de calcul et raisonnement du concours blanc est un grand classique (voir aussi problème B du sujet de modélisation 2024).
   - Trouver la loi de $\max(X_1,\ldots,X_n)$ ou $\min(X_1,\ldots,X_n)$ pour des variables $X_1,\ldots,X_n$ indépendantes de lois données.

12 Chapitre 13-Diagonalisation

1. **Méthodes** :
   - En dimension deux : savoir déterminer le spectre d'une matrice avec le déterminant.
   - Savoir déterminer le spectre d'une matrice A en étudiant le rang de $A-\lambda I_n$ (pivot de Gauss).
   - Savoir déterminer le spectre d'un endomorphisme via une matrice représentative.
   - Savoir déterminer une base des sous-espaces propres.
   - Savoir diagonaliser une matrice diagonalisable.
2. **Preuves à connaître :**
   (a) Si $A=PBP^{-1}$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PB^nP^{-1}$.
3. **Question classique** : trouver le spectre, déterminer une base des sous-espaces propres, étudier la diagonalisabilité puis diagonaliser.

13 Chapitre 14-Produit scalaire

1. **Méthodes** :
   - Savoir calculer un produit scalaire, une norme, des coordonnées en base orthonormée.
   - Savoir normaliser un vecteur non nul.
   - Savoir déterminer l'orthogonal d'une sous-espace vectoriel.
   - Savoir déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
   - Savoir diagonaliser une matrice symétrique réelle en base orthonormée.
2. **Preuves à connaître :**
   (a) Soit $e_1, \ldots, e_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Montrer :
   $$F^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in [\![1, p]\!] \quad \langle x, e_i \rangle = 0\}.$$

14 Chapitre 15-Théorèmes limites en probabilité

1. **Méthodes** :
   - Connaître l'intérêt de la loi des grands nombres pour la simulation et l'estimation de probabilité d'un événement.
   - Savoir montrer une convergence en loi.
   - Savoir mettre en œuvre un test de conformité à la moyenne.
2. **Preuves à connaître :**
   (a) Preuve de la loi des grands nombres dans le cas où les variables possèdent une variance.
   (b) Obtention d'une intervalle de non-rejet pour une suite de variables indépendantes de loi de $\mathcal{B}(p)$ avec l'inégalité de Bienaymée-Tchebytchev (voir TP8).
3. **Questions classiques** :
   - Justifier une simulation informatique permettant d'estimer une probabilité, une espérance en faisant appel à la loi des grands nombres.
   - Utiliser l'inégalité de Bienaymée-Tchebychev (voir TP8, preuve de la loi des grands nombres ou dernière partie du sujet de modélisation du concours blanc).