

## 1 Modélisation et commande du processus

1. D'après (E), on a :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \frac{dT_1}{dt} \\ &= \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} (T_2 - T_1) \\ &= \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} (T_2 - T_\infty + T_\infty - T_1) \\ &= \frac{h_1 S_1}{m_1 C_1} (x_2 - x_1) = f_1(x_1, x_2, u). \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dT_2}{dt} \\ &= \frac{h_1 S_1}{m_2 C_2} (T_1 - T_2) + \frac{h_2 S_2}{m_2 C_2} (T_\infty - T_2) + \frac{u}{m_2 C_2} \\ &= \frac{h_1 S_1}{m_2 C_2} (x_1 - x_2) - \frac{h_2 S_2}{m_2 C_2} x_2 + \frac{u}{m_2 C_2} = f_2(x_1, x_2, u).\end{aligned}$$

2. a. Si  $Ax + bu = 0$ , alors :

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 9u = 0 \end{cases}$$

La première ligne du système assure alors que  $x_1 = x_2$ .

b. On en déduit que si les températures de l'eau et des petits pois sont constantes (i.e.  $\frac{dx}{dt} = 0$ ), alors elles sont égales.

c. Si  $x_1 = x_2 = 72$ , la deuxième ligne du système de la question 2.a devient  $9u = 2 \times 72$  i.e.  $u = 16$ .

3. a. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\lambda \in \text{Sp}(A) &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-5 - \lambda)(-6 - \lambda) - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 11\lambda + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = -10.\end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc  $-1$  et  $-10$ .

b. La matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  admet deux valeurs propres distinctes ; elle est donc diagonalisable (et tous les espaces propres sont de dimension 1).

c. Soit  $X = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .

$$X \in \text{Ker}(A + I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + 5y = 0 \\ 4 - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{4}{5}.$$

On en déduit que l'espace propre  $E_{-1}$  de  $A$  associé à la valeur propre  $-1$  est engendré par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$  (ce vecteur est non nul et on sait que  $\dim E_{-1} = 1$ ). Le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$  forme donc une base de  $E_{-1}$ .

$$X \in \text{Ker}(A + 10I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 5y = 0 \\ 4 + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1.$$

On en déduit que l'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $-10$  est engendré par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  (ce vecteur est non nul et on sait que  $\dim E_{-10} = 1$ ). Le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  forme donc une base de  $E_{-10}$ .

Puisque  $A$  est diagonalisable et admet deux valeurs propres distinctes, la famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  forme une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

d. La formule de changement de base assure alors que  $A = PDP^{-1}$  où  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$ . Le calcul de l'inverse de  $P$  est immédiat :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} = -\frac{5}{9} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}.$$

4. a. Puisque  $z = P^{-1}x$ , on a  $z_1 = \frac{5}{9}(x_1 + x_2)$  et  $z_2 = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{5}x_1 - x_2\right)$ . Par linéarité de la dérivation, on trouve que :

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{5}{9} \left( \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} \right) \text{ et } \frac{dz_2}{dt} = \frac{5}{9} \left( \frac{4}{5} \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right),$$

c'est-à-dire  $\frac{dz}{dt} = P^{-1} \frac{dx}{dt}$ .

b. Remarquons que  $x = Pz$  et  $D = P^{-1}AP$ . D'après (1), on a :

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= P^{-1} \frac{dx}{dt} \\ &= P^{-1}Ax + P^{-1}bu \\ &= P^{-1}APz + P^{-1}bu \\ &= Dz + \beta u, \text{ où } \beta = P^{-1}b.\end{aligned}$$

c. On trouve immédiatement que  $x_1(0) = T_1(0) - T_\infty = 0$  et  $x_2(0) = T_2(0) - T_\infty = 72$ .

Ainsi :

$$z(0) = P^{-1}x(0) = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \end{pmatrix} = \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 72 \\ -72 \end{pmatrix} = 40 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d. Puisque  $\beta = P^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ . L'équation différentielle (2) équivaut au système :

$$\begin{cases} z_1' = -z_1 + 5 \times 16 = -z_1 + 80 \\ z_2' = -10z_2 - 5 \times 16 = -10z_2 - 80 \end{cases}$$

Les deux équations composant le système sont des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Il existe donc deux réels  $K_1$  et  $K_2$  tels que, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{cases} z_1(t) = K_1 e^{-t} + 80 \\ z_2(t) = K_2 e^{-10t} - 8. \end{cases}$$

Puisque  $z_1(0) = 40$  et  $z_2(0)$ , on trouve que :

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} z_1(t) = -40e^{-t} + 80 \\ z_2(t) = -32e^{-10t} - 8. \end{cases}$$

e. Puisque  $x = Pz$ , on trouve que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} x_1(t) = z_1(t) + z_2(t) = 72 - 40e^{-t} - 32e^{-10t} \\ x_2(t) = \frac{4}{5}z_1(t) - z_2(t) = 72 - 32e^{-t} + 32e^{-10t}. \end{cases}$$

5. a. La fonction  $x_2$  est dérivable  $\mathbb{R}_+$  (par opérations sur les fonctions ou parce que  $x_2$  est solution d'une équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+$ ) et :

$$\forall t \geq 0, x_2'(t) = 32e^{-t} - 320e^{-10t}.$$

Ainsi :

$$x_2'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 32e^{-t} \geq 320e^{-10t} \Leftrightarrow e^{9t} \geq 10 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 10}{9} > 0.$$

On en déduit que le tableau de variations de la fonction  $x_2$  :

| $t$      | 0  | $\frac{\ln 10}{9}$                 | $+\infty$ |
|----------|----|------------------------------------|-----------|
| $x_2(t)$ | 72 | $x_2\left(\frac{\ln 10}{9}\right)$ | 72        |

On en déduit l'allure du graphe de la fonction  $x_2$ .

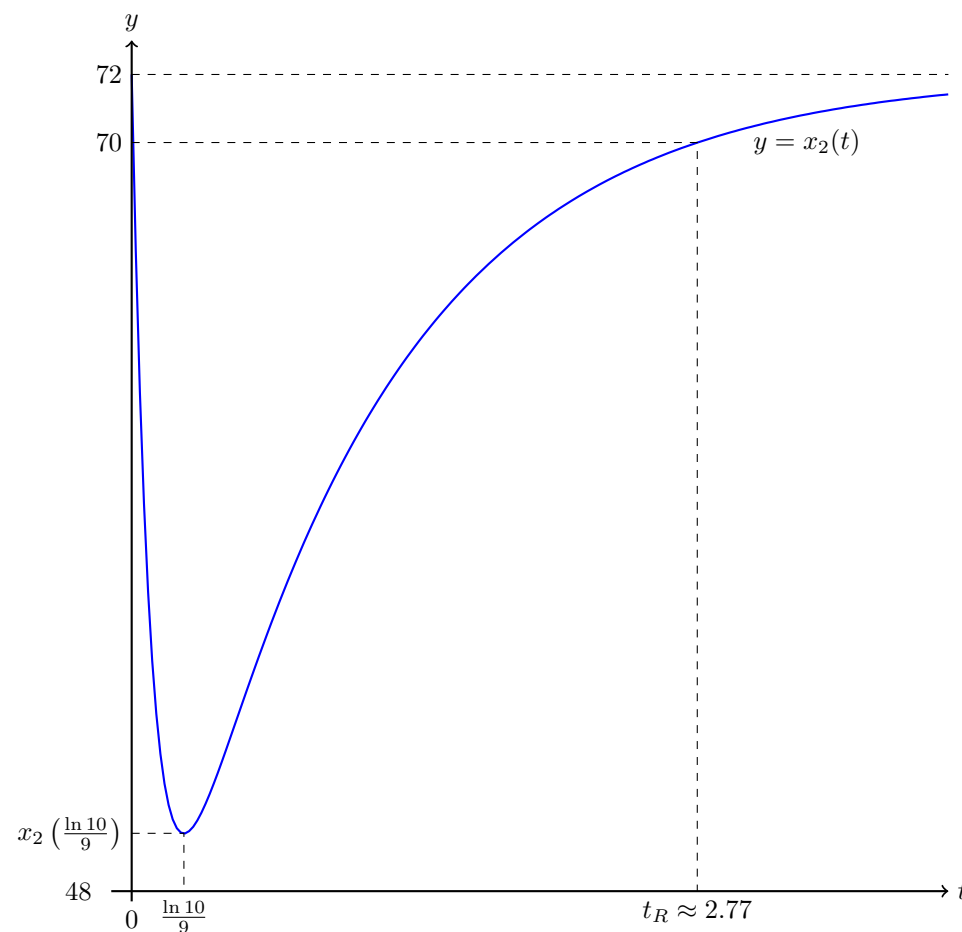


Figure 1 – Représentation graphique de la fonction  $x_2$

b. On rappelle que  $x_2$  est la différence entre la température de l'eau et la température extérieure. Au début de la chauffe, la température de l'eau chute brutalement (de  $92^\circ\text{C}$  à environ  $50^\circ\text{C}$ ), conséquence d'une déperdition d'énergie (transfert de chaleur vers les petits pois). La température remonte ensuite très vite pour tendre vers la température maximale de cuisson,  $92^\circ\text{C}$ .

c. Le temps  $t_R$  correspond au temps à partir la cuisson est censée démarrée selon le cahier des charges.

Puisque  $x_2 = T_2 - T_\infty$ ,  $t_R = \min\{t \geq 0 \mid \forall t' \geq t, x_2(t') \geq 70\}$ .

d. Calculons :

$$x_2(\ln 16) = 72 - 32e^{-\ln 16} + 32e^{-10 \ln 16} = 72 - \frac{32}{16} + \frac{32}{16^{10}} = 70 + \frac{32}{16^{10}} \approx 70$$

Puisque  $\ln 16 > \frac{\ln 10}{9}$ , le réel  $\ln 16$  est bien une bonne approximation de  $t_R$ .

Les valeurs propres de  $A$  correspondent aux coefficients multiplicateurs à l'intérieur des exponentielles de la solution  $x_2$ . Ainsi, plus les valeurs propres de  $A$  seront proches de  $-\infty$ , plus la fonction  $x_2$  convergera vite vers 72, et donc plus le temps  $t_R$  sera petit.

6. Ce choix permet d'augmenter  $u$  lorsque  $x_2$  diminue (et réciproquement), i.e. d'augmenter la puissance de chauffe lorsque la température de l'eau diminue (et réciproquement). Ce choix permet donc de réguler la température de l'eau en dépensant peu d'énergie.

7. Si  $k = 0$ , alors  $u = 16$ . On est alors ramené au cas du paragraphe précédent (commande en boucle ouverte). Le réel  $\ln 16$  est alors une bonne approximation de  $t_R$ .

8. Remarquons que  $c^T w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 72 \\ x_2 - 72 \end{pmatrix} = x_2 - 72$ . Par linéarité de la dérivation, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{dx}{dt} \\ &= Ax + bu \\ &= A \left( w + 72 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + b(16 + k(72 - x_2)) \\ &= Aw + 72A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 16b - kbc^T w \\ &= (A - kbc^T) w + 72 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 16 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &= (A - kbc^T) w. \end{aligned}$$

9. a. Remarquons que :

$$A - kbc^T = A - k \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 4 & -6 - 9k \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(A - kbc^T) &\Leftrightarrow \det(A - kbc^T - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-5 - \lambda)(-6 - 9k - \lambda) - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + (9k + 11)\lambda + 45k + 10 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant  $\Delta(k)$  du polynôme  $\lambda^2 + (9k + 11)\lambda + 45k + 10$  vérifiant :

$$\Delta(k) = (9k + 11)^2 - 4(45k + 10) = 81k^2 + 18k + 81 = 9(9k^2 + 2k + 9) > 0 \text{ (puisque } k \geq 0),$$

la matrice  $A - kbc^T$  admet deux valeurs propres distinctes :

$$\lambda_1(k) = \frac{-9k - 11 - 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2} \text{ et } \lambda_2(k) = \frac{-9k - 11 + 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2}.$$

b. Les fonctions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  par théorèmes opératoires (on rappelle que  $\Delta(k) > 0$  pour tout  $k \geq 0$ ).

$$\begin{aligned} \lambda'_1(k) &= -\frac{9}{2} - \frac{3(18k + 2)}{4\sqrt{9k^2 + 2k + 9}} < 0 \\ \lambda'_2(k) &= -\frac{9}{2} + \frac{3(9k + 1)}{2\sqrt{9k^2 + 2k + 9}} \\ &= \frac{3(9k + 1) - 9\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2\sqrt{9k^2 + 2k + 9}} \\ &= \frac{9(9k + 1)^2 - 81(9k^2 + 2k + 9)}{2\sqrt{9k^2 + 2k + 9} [3(9k + 1) + 9\sqrt{9k^2 + 2k + 9}]} \\ &= \frac{-9 \times 80}{2\sqrt{9k^2 + 2k + 9} [3(9k + 1) + 9\sqrt{9k^2 + 2k + 9}]} < 0, \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité étant obtenue par multiplication par une quantité conjuguée.

On en déduit que les fonctions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont décroissantes sur  $\mathbb{R}_+$ .

10. Plus les valeurs de  $k$  sont grandes, plus les valeurs propres de la matrice  $A - kbc^T$  sont petites, et donc plus le temps  $t_R$  est petit.

L'inconvénient à augmenter  $k$  est de dépenser une trop grande quantité d'énergie pour cuire les petits pois.

## 2 Étude informatique des commandes

1. On suit la définition de  $f$  :

---

```
def f(t):
    return 72 - 32*np.exp(-t) + 32*np.exp(-10*t)
```

---

2. La liste `Lt1` contient la liste des  $N$  flottants équirépartis entre 0 et 5, i.e. tous les flottants de la forme  $\frac{5k}{N-1}$  où  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .

La liste `Ly1` contient les images par  $f$  de chaque élément de la liste `Lt1`, i.e. tous les flottants de la forme  $f\left(\frac{5k}{N-1}\right)$  où  $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ .

3. Il s'agit simplement de rechercher le minimum de la liste `Ly1` et le temps correspondant (au même indice) dans la liste `Lt1`.

---

```
def minimum_f(N):
    Lt1 = np.linspace(0, 5, N)
    Ly1 = []
    for k in range(0, N):
        Ly1.append(f(Lt1[k]))
    min_f = Ly1[0]
    t_min = Lt1[0]
    for k in range(1, N):
        if Ly1[k] < min_f:
            min_f = Ly1[k]
            t_min = Lt1[k]
    return (min_f, t_min)
```

---

Au lieu de retenir le temps `t_min`, on aurait pu retenir l'indice du minimum dans la recherche de celui-ci.

4. a. Puisqu'on calcule, pour chaque échantillon de valeurs de la fonction  $f$ , le minimum de ces valeurs, il est prévisible que ces deux valeurs diffèrent (et même qu'aucune des deux ne correspondent au minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ ).
- b. Le deuxième échantillon contient 1000 fois plus de point que le premier. La valeur de  $t_{m_2}$  est probablement une meilleure approximation de  $t_R$  que  $t_{m_1}$ .
5. Le troisième échantillon contient bien moins de valeurs de  $f$  que le second (400 fois moins), expliquant ainsi que  $t_{m_3}$  est une moins bonne approximation de  $t_R$  que  $t_{m_2}$ .

Le fait que la valeur de  $t_{m_3}$  soit plus éloignée de la valeur exacte que  $t_{m_1}$  s'explique a posteriori : le premier échantillonnage contient un point d'ordonnée inférieure aux ordonnées de tous les points du troisième échantillonnage.

6. Il suffit de calculer  $u_n$  d'après la formule de récurrence tant que  $|F(u_n)| \geq e$ .

---

```
def Newt(F, G, u0, e):
    u = u0
    while abs(F(u)) >= e:
        u -= F(u)/G(u)
    return u
```

---

7. On cherche la méthode de Newton fournit une approximation  $u_{n_0}$  d'une solution  $x^*$  de l'équation  $F(x) = 0$ . Puisque  $F$  est continue sur  $I$  (car dérivable sur  $I$ ) alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) = F(x^*) = 0$ . Le flottant  $e$  permet de contrôler l'erreur d'approximation entre  $u_{n_0}$  et  $x^*$  : plus  $F(u_{n_0})$  est proche de 0 plus on espère que  $u_{n_0}$  est proche de  $x^*$  (sans qu'on puisse contrôler la vitesse de cette convergence).

Choisir la plus petite valeur de  $e$  fournit la meilleure approximation. Ici on choisit donc  $e = 10^{-8}$ .

8. Le test d'égalité entre flottants n'est pas pertinent en Python puisque la précision est finie (et que  $x^*$  n'est peut-être pas représentable en flottant). Il n'est donc pas pertinent de modifier le code de la fonction `Newt`.
9. Si un tel  $n_0$  n'existe pas, le programme ne terminera pas : la boucle `while` sera infinie.
10. On modifie la fonction précédente en ajoutant un compteur d'itérations permettant de ne réaliser qu'au plus `nder` itérations de la boucle `while`.

---

```
def Newt(F, G, u0, e, nder):
    u = u0
    n = 0
    while abs(F(u)) >= e and n <= nder:
        u -= F(u)/G(u)
        n += 1
    if n <= nder:
        return u
    else:
        return False
```

---

11. D'après le tableau de variations et la représentation de  $x_2$ , le temps  $t_R$  est l'unique solution  $t^*$  de l'équation  $x_2(t) = 70$ , donc de l'équation  $x_2(t) - 70 = 0$ , sur  $\left[\frac{\ln 10}{9}, +\infty\right[$

Appliquée à la fonction  $F : t \mapsto x_2(t) - 70$ , la méthode de Newton permet de calculer une approximation de  $t_R$  (en choisissant une initialisation adéquate afin de ne pas converger vers l'autre solution, inférieure à  $\frac{\ln 10}{9}$ ).

12. Remarquons que **G1** est la dérivée de la fonction **F1**. On applique donc la méthode de Newton à la fonction **F1** (telle que prescrit à la question précédente) en choisissant deux valeurs distinctes de  $u_0$ . L'une fournit une valeur approchée d'une solution de  $F1(x) = 0$  supérieure à  $\frac{\ln 10}{9}$ , l'autre inférieure à  $\frac{\ln 10}{9}$ . Puisque cette équation admet deux solutions, dont seule sur l'intervalle  $\left[\frac{\ln 10}{9}, +\infty\right[$  nous intéresse, on en conclut que 2.772588722252261 est une approximation de  $t_R$ . L'autre valeur est une approximation de la solution sur  $\left[0, \frac{\ln 10}{9}\right]$ . Cette différence est due à l'initialisation (i.e. la valeur de  $u_0$ ), comme indiqué par l'énoncé.

### 3 Filtre de Kalman

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Remarquons que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_{i+1} = x_i = x_0$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varepsilon_i$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  donc  $y_i = h^T x_0 + \varepsilon_i$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(h^T x_0, \sigma^2)$  puisque  $h^T x_0$  est un réel déterministe (i.e. non aléatoire). Puisque les variables aléatoires  $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont indépendantes, les variables  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$  le sont aussi. Ainsi la moyenne empirique  $\bar{y}_n$  est une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales, elle suit donc une loi normale d'espérance :

$$\mathbb{E}(\bar{y}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(y_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^T x_0 = h^T x_0$$

et de variance (par indépendance) :

$$\mathbb{V}(\bar{y}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(y_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. Le résultat demandé est (à une inégalité stricte près) la loi faible des grands nombres appliquée aux variables aléatoires  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . On se propose de redémontrer ici le résultat.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\delta > 0$ . Puisque la variable aléatoire  $\bar{y}_n$  admet une variance (et donc une espérance), on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|\bar{y}_n - \mathbb{E}(\bar{y}_n)| \geq \delta) \leq \frac{\mathbb{V}(\bar{y}_n)}{\delta^2}$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(|\bar{y}_n - h^T x_0| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$$

Puisque  $[|\bar{y}_n - h^T x_0| > \delta] \subset [|\bar{y}_n - h^T x_0| \geq \delta]$ , il vient que :

$$0 \leq \mathbb{P}(|\bar{y}_n - h^T x_0| > \delta) \leq \mathbb{P}(|\bar{y}_n - h^T x_0| \geq \delta) \leq \frac{\sigma^2}{n\delta^2}$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2}{n\delta^2} = 0$ , on en déduit par le théorème d'encadrement de limites que :

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{y}_n - h^T x_0| > \delta) = 0.$$

3. Soit  $w \in \mathbb{R}^2$ . Vérifions que  $x + w$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu + w$  et de matrice de covariance  $\Sigma$ .

- La matrice  $\Sigma$  est symétrique et pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v^T \Sigma v \geq 0$  par définition,
- Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . Puisque  $v^T w$  est un réel déterministe et puisque  $v^T x$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(v^T \mu, v^T \Sigma v)$ , alors  $v^T(x + w) = v^T x + v^T w$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(v^T \mu + v^T w, v^T \Sigma v) = \mathcal{N}(v^T(\mu + w), v^T \Sigma v)$ .

On en déduit le résultat attendu.

4. Soient  $w \in \mathbb{R}^2$  et  $z$  une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Vérifions que  $zw$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $\sigma^2 ww^T$ .

- La matrice  $\sigma^2 ww^T$  est symétrique car  $(\sigma^2 ww^T)^T = \sigma^2 (w^T)^T w^T = \sigma^2 ww^T$ . De plus, pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$v^T \sigma^2 ww^T v = \sigma^2 (v^T w) (vw^T) = \sigma^2 (vw^T)^T (vw^T) = \sigma^2 \|vw^T\|^2 \geq 0.$$

- Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . Remarquons que  $v^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ . Montrons alors que  $v^T zw$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, v^T \sigma^2 ww^T v)$ ,

Remarquons de plus que puisque  $z$  est à valeurs réelles,  $v^T z w = (v^T w) z$ . Puisque  $v^T w$  est un scalaire qu'on notera  $\lambda$ ,  $v^T z w$  est une variable aléatoire de la forme  $\lambda z$  ; elle suit donc une loi normale. Déterminons les paramètres de cette loi :

$$\mathbb{E}(v^T z w) = \lambda \mathbb{E}(z) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(v^T z w) = \lambda^2 \mathbb{V}(Z) = (v^T w)^2 \sigma^2.$$

Puisque  $v^T w$  est un scalaire, sa transposée aussi et ainsi :

$$(v^T w)^2 = (v^T w) (v^T w)^T = v^T w w^T v.$$

On en déduit bien que  $v^T z w$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, v^T \sigma^2 w w^T v)$

On a donc bien prouvé que  $z w$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $\sigma^2 w w^T$ .

5. Soit  $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ . Montrons que  $Mx$  est un vecteur gaussien de moyenne  $Mx$  et de matrice de covariance  $M \sum M^T$ .

- La matrice  $M \sum M^T$  est symétrique puisque  $\sum$  l'est :

$$(M \sum M^T)^T = (M^T)^T \sum^T M^T = M \sum M^T.$$

De plus, pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ , on a  $w = M^T v \in \mathbb{R}^2$  et ainsi :

$$v^T M \sum M^T v = (M^T v)^T \sum (M^T v) = w^T \sum w \geq 0$$

puisque  $\sum$  est une matrice de covariance d'un vecteur gaussien.

- Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . Déterminons la loi de  $v^T Mx$ . Remarquons que  $w = M^T v$  est un vecteur déterministe de  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi par définition de  $x$ , on sait que  $w^T x = v^T Mx$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(w^T \mu, w^T \sum w) = \mathcal{N}(v^T (M\mu), v^T (M \sum M^T) v)$ .

On en déduit que  $Mx$  est un vecteur gaussien de moyenne  $M\mu$  et de matrice de covariance  $M \sum M^T$ .

6. Montrons le résultat par récurrence sur  $i \in \mathbb{N}$ . L'initialisation est triviale. Soit  $i \in \mathbb{N}$ .

Supposons que  $x_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu_i = F^i \mu_0 + \sum_{j=0}^{i-1} F^j g u_{i-1-j}$  et de

matrice de covariance  $\sum_i = F^i \sum_0 (F^T)^i$ .

D'après la question 5,  $Fx_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $F\mu_i$  et de matrice de covariance  $F \sum_i F^T$ .

D'après la question 3,  $x_{i+1} = Fx_i + g u_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $F\mu_i + g u_i$  et de matrice de covariance  $F \sum_i F^T = F^{i+1} \sum_0 (F^T)^{i+1}$ . Puisque :

$$\begin{aligned} F\mu_i + g u_i &= F^{i+1} \mu_0 + g u_i + \sum_{j=0}^{i-1} F^{j+1} g u_{i-1-j} \\ &= F^{i+1} \mu_0 + F^0 g u_i + \sum_{j=1}^i F^j g u_{i-j} \\ &= F^{i+1} \mu_0 + \sum_{j=0}^{(i+1)-1} F^j g u_{(i+1)-1-j}, \end{aligned}$$

la propriété est héréditaire, ce qui conclut la récurrence.

7. Puisque  $\widehat{x}_0$  est un vecteur déterministe,  $x_0 - \widehat{x}_0$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\mu_0 - \widehat{x}_0 = 0_{\mathbb{R}^2}$  et de matrice de covariance  $\sum_0$  d'après la question 3.
8. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} x_{i+1} - \widehat{x}_{i+1} &= Fx_i + g u_i - p_{i+1} - (y_{i+1} - h^T p_{i+1}) k_{i+1} \\ &= Fx_i + g u_i - F\widehat{x}_i - g u_i - (h^T x_{i+1} + \varepsilon_{i+1} - h^T F\widehat{x}_i - h^T g u_i) k_{i+1} \\ &= F(x_i - \widehat{x}_i) - k_{i+1} h^T F(x_i - \widehat{x}_i) - \varepsilon_{i+1} k_{i+1} \\ &= (I_2 - k_{i+1} h^T) F(x_i - \widehat{x}_i) - \varepsilon_{i+1} k_{i+1}. \end{aligned}$$

9. Soit  $\alpha_i$  un réel quelconque. Rappelons que  $Q_i$  est une matrice symétrique.

$$\begin{aligned} &\alpha_i \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h \right) \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h \right)^T \\ &= \alpha_i \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h \right) \left( k_{i+1}^T - \frac{1}{\alpha_i} h^T F Q_i F^T \right) \\ &= \alpha_i \left( k_{i+1} k_{i+1}^T - \frac{1}{\alpha_i} k_{i+1} h^T F Q_i F^T - \frac{1}{\alpha_i} k_{i+1} F Q_i F^T h + \frac{1}{\alpha_i^2} F Q_i F^T h h^T F Q_i F^T \right) \\ &= \alpha_i k_{i+1} k_{i+1}^T - k_{i+1} h^T F Q_i F^T - k_{i+1} F Q_i F^T h + \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h h^T F Q_i F^T \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\alpha_i \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h \right) \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h \right)^T + F Q_i F^T - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h h^T F Q_i F^T \\ &= \alpha_i k_{i+1} k_{i+1}^T - k_{i+1} h^T F Q_i F^T - k_{i+1} F Q_i F^T h + F Q_i F^T. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} Q_{i+1} &= (I_2 - k_{i+1}h^T) F Q_i F^T (I_2 - h k_{i+1}^T) + \sigma^2 k_{i+1} k_{i+1}^T \\ &= F Q_i F^T - k_{i+1} h^T F Q_i F^T - F Q_i F^T h k_{i+1}^T + k_{i+1} \underbrace{h^T F Q_i F^T h}_{\in \mathbb{R}} k_{i+1}^T + \sigma^2 k_{i+1} k_{i+1}^T \\ &= (\sigma^2 + h^T F Q_i F^T h) k_{i+1} k_{i+1}^T - k_{i+1} h^T F Q_i F^T - F Q_i F^T h k_{i+1}^T + F Q_i F^T. \end{aligned}$$

On trouve l'égalité recherchée en posant  $\alpha_i = \sigma^2 + h^T F Q_i F^T h$ .

10. On sait que  $\sigma^2 > 0$  par hypothèse. Puisque  $Q_i$  est une matrice de covariance d'un vecteur gaussien et puisque  $F^T h \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$h^T F Q_i F^T h = (F^T h) Q_i (F^T h) \geq 0.$$

On en déduit donc que  $\alpha_i > 0$ .

11. Pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\begin{aligned} v^T Q_{i+1} v &= \alpha_i \left\| \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h \right)^T v \right\|^2 + v^T \left( F Q_i F^T - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h h^T F Q_i F^T \right) v \\ &\geq v^T \left( F Q_i F^T - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h h^T F Q_i F^T \right) v. \end{aligned}$$

On remarque que l'inégalité précédente est une égalité lorsque  $k_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h$ . Pour cette valeur de  $k_{i+1}$ , la quantité  $v^T Q_{i+1} v$  est donc minimale pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ . Remarquons qu'il n'y a pas d'autre valeur de  $k_{i+1}$  pour laquelle la quantité  $v^T Q_{i+1} v$  est minimale pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R}^2, \alpha_i \left\| \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h \right)^T v \right\|^2 &= 0 \\ \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2, \left( k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h \right)^T v &= 0 \\ \Rightarrow k_{i+1} - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h &= 0, \end{aligned}$$

la dernière implication étant vraie car le seul vecteur orthogonal à tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  est le vecteur nul.

12. La matrice  $F$  étant inversible, elle est de rang 2, donc  $F^T$  aussi, i.e.  $F^T$  est inversible.

Puisque  $F$  est diagonalisable, il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$  et deux complexes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de module strictement inférieur à 1 tel que :

$$F = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On trouve alors que :

$$F^T = (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^T.$$

La matrice  $F^T$  est donc diagonalisable et ses valeurs propres (identiques à celles de  $F$ ) sont des valeurs propres de module strictement inférieur ou égal à 1.

13. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a, d'après la question 9 :

$$Q_{i+1} = F Q_i F^T - \frac{1}{\alpha_i} F Q_i F^T h h^T F Q_i F^T = F Q_i F^T - \frac{F Q_i F^T h h^T F Q_i F^T}{\sigma^2 + h^T F Q_i F^T h}$$

Ainsi, en multipliant par  $F^{-i-1}$  à gauche (i.e.  $i+1$  fois par  $F^{-1}$ ) et par  $(F^T)^{-i-1}$  à gauche (i.e.  $i+1$  fois par  $(F^T)^{-1}$ ), on trouve :

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= F^{-i-1} Q_{i+1} (F^T)^{-i-1} \\ &= F^{-i} Q_i (F^T)^{-i} - \frac{F^{-i} Q_i F^T h h^T F Q_i (F^T)^{-i}}{\sigma^2 + h^T F Q_i F^T h} \\ &= R_i - \frac{F^{-i} Q_i F^T h h^T F Q_i (F^T)^{-i}}{\sigma^2 + h^T F Q_i F^T h}. \end{aligned}$$

14. a. Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , posons  $u_i = v^T R_i v \in \mathbb{R}$ . D'après la question précédente

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, u_{i+1} &= u_i - \frac{v^T F^{-i} Q_i F^T h h^T F Q_i (F^T)^{-i} v}{\sigma^2 + h^T F Q_i F^T h} \\ &= u_i - \frac{\left\| h^T F Q_i (F^T)^{-i} v \right\|^2}{\alpha_i} \leq u_i. \end{aligned}$$

La suite  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante, donc majorée par  $u_0$ . De plus, puisque  $Q_i$  est une matrice de covariance d'un vecteur gaussien :

$$u_i = v^T F^{-i} Q_i (F^T)^{-i} v = \left( (F^T)^{-i} v \right)^T Q_i \left( (F^T)^{-i} v \right) \geq 0$$

La suite  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est donc minorée par 0. La suite  $(v^T R_i v)_{i \in \mathbb{N}}$  est donc bornée.

- b. Soient  $v$  et  $w$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ . Remarquons que  $w^T R_i v \in \mathbb{R}$  et ainsi que  $w^T R_i v = v^T R_i w$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{R}^2, (v+w)^T R_i (v+w) &= v^T R_i w + v^T R_i w + w^T R_i v + w^T R_i w \\ &= v^T R_i w + 2v^T R_i w + w^T R_i w. \end{aligned}$$

On en déduit une égalité qui n'est pas sans rappeler une égalité de polarisation :

$$\forall i \in \mathbb{R}^2, v^T R_i w = \frac{1}{2} [(v+w)^T R_i (v+w) - v^T R_i w - w^T R_i w].$$

D'après la question précédente, la suite  $(v^T R_i w)_{i \in \mathbb{N}}$  s'écrit comme combinaison linéaire de trois suites bornées, elle est donc elle-même bornée.

15. Supposons que  $v_1$  et  $v_2$  sont des vecteurs propres de  $F^T$  associés aux valeurs propres complexes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On a alors :

$$\forall i \in \mathbb{N}, v_1^T Q_i v_2 = v_1^T F^i R_i (F^T)^i v_2 = \left( (F^T)^i v_1 \right)^T R_i \left( (F^T)^i v_2 \right).$$

On montre facilement par récurrence que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, (F^T)^i v_1 = \lambda_1^i v_1 \text{ et } (F^T)^i v_2 = \lambda_2^i v_2.$$

Ainsi :

$$\forall i \in \mathbb{N}, v_1^T Q_i v_2 = (\lambda_1^i v_1)^T R_i (\lambda_2^i v_2) = (\lambda_1 \lambda_2)^i v_1^T R_i v_2.$$

16. Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ . Puisque  $F^T$  est diagonalisable, il existe une base  $(v_1, v_2)$  de  $\mathbb{C}^2$  formée de vecteurs propres de  $F^T$ . Ainsi, il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $v = xv_1 + yv_2$ .

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{N}, v^T Q_i v &= (xv_1 + yv_2)^T Q_i (xv_1 + yv_2) \\ &= x^2 v_1^T Q_i v_1 + xy v_1^T Q_i v_2 + xy v_2^T Q_i v_1 + y^2 v_2^T Q_i v_2 \\ &= x^2 \lambda_1^{2i} v_1^T R_i v_1 + 2xy (\lambda_1 \lambda_2)^i v_1^T R_i v_2 + y^2 \lambda_2^{2i} v_2^T R_i v_2. \end{aligned}$$

Puisque  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| < 1$  les suites  $(\lambda_1^{2i})_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(\lambda_1^i \lambda_2^i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(\lambda_2^{2i})_{i \in \mathbb{N}}$  convergent vers 0. Puisque tous les termes de la suite  $(v^T Q_i v)_{i \in \mathbb{N}}$  s'écrivent comme une somme d'un produit d'une suite bornée par une suite convergente vers 0, la suite  $(v^T Q_i v)_{i \in \mathbb{N}}$  converge elle-même vers 0.

17. Puisque pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $x_i - \hat{x}_i$  est un vecteur gaussien de moyenne  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et de matrice de covariance  $Q_i$ , alors, pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v^T (x_i - \hat{x}_i)$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(0, v^T Q_i v)$ . On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|v^T (x_i - \hat{x}_i)| \geq \varepsilon) \leq \frac{v^T Q_i v}{\varepsilon^2}$$

En utilisant la question précédente, on trouve que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|v^T (x_i - \hat{x}_i)| \geq \varepsilon) = 0.$$

On dit alors que la suite  $(v^T (x_i - \hat{x}_i))_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ . En choisissant  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on trouve les coordonnées de  $x_i - \hat{x}_i$  convergent en probabilité vers 0.