1 Calcul d'une espérance de vie

1. On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec condition initiale. La solution est donnée par la fonction $z : t \mapsto z_0 e^{-\alpha t} = 1300 e^{-\alpha t}$.

2. a. Pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{z(t)}{z_0} = e^{-\alpha t}$.

   On en déduit que pour tout $t \geqslant 0$, $F(t) = 1 - e^{-\alpha t} = \dfrac{z_0 - z(t)}{z_0}$. La quantité $F(t)$ représente donc la proportion d'individus jusqu'à l'instant t.

   b. La fonction F est la restriction à $\mathbb{R}^+$ de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre α, par ailleurs nulle sur $\mathbb{R}^-$. Si une variable aléatoire X suit une telle loi, alors :

$$\forall t \geqslant 0,\ F(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) \text{ et } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha}.$$

   D'après l'interprétation ci-dessus, l'espérance de vie de la cohorte existe donc et est égale à l'espérance d'une variable aléatoire égale à la durée de vie d'un individu de la cohorte, c'est-à-dire égale à $\dfrac{1}{\alpha}$.

3. a. La quantité $z(t) - z(t + \Delta_t)$ correspond au nombre d'individus morts entre les instants t et $t + \Delta_t$.

   b. En interprétant la proportion $\dfrac{z(t_i) - z(t_{i+1})}{z_0}$ de décès entre les instants t_i et t_{i+1} comme une probabilité, on peut interpréter la quantité

$$\mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{+\infty} t_i \left(z(t_i) - z(t_{i+1})\right)}{z_0}$$

   comme l'espérance d'une variable aléatoire Y égale au dernier instant t_i avant le décès d'un individu de la cohorte.

   c. Calculons les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} t \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -z_0 \alpha t e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -z_0 \alpha e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

   Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha t e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est l'espérance de la loi exponentielle de paramètre α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\dfrac{z_0}{\alpha}$. Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une densité de la loi exponentielle de paramètre α sur son support, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-z_0$. On en déduit que :

$$\lim_{\Delta_t \to 0} \mathcal{E}_{\Delta_t} = \frac{1}{\alpha}.$$

   Puisque $\alpha = -\dfrac{z'}{z}$ et puisque z est sans dimension, α est homogène à l'inverse d'un temps et donc $\dfrac{1}{\alpha}$ est homogène à l'inverse d'un temps. D'après ce qui précède, on peut interpréter $\dfrac{1}{\alpha}$ comme l'espérance de vie de la cohorte. En choisissant $\Delta_t = 1$, la quantité $z(t_i) - z(t_{i+1})$ correspond au nombre de décès en une année (entre les instants t_i et t_{i+1}). D'après ce qui précède, $\mathcal{E}_{\Delta_t}$ est une bonne approximation de $\dfrac{1}{\alpha}$ donc de l'espérance de vie de la cohorte fictive.

Modèle de Bernoulli

1. a. On peut considérer que le taux de mortalité hors variole peut varier au cours au fil des années, pour des raisons diverses : autres épidémies que la variole, guerres, catastrophes naturelles, etc.

   b. Puisque $x(t)$ désigne le nombre de survivants à l'instant t, la quantité $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = x'(t)$ désigne la variation instantanée de survivants à cet instant, et ainsi $-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ désigne la variation instantanée de morts à l'instant t.
   Puisque c désigne le taux d'individus morts de la variole et S désigne le nombre d'invidus susceptibles, cS désigne le nombre d'individus morts de la variole.
   Puisque :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = bS - aR - (a+b+c)S = -a(R+S) - cS = -ax - cS.$$

   On en déduit que :

$$-\frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cS\right) = a.$$

   c. Faire le choix d'étudier une cohorte fictive non atteinte par la variole revient à poser $z = S$, $b = c = 0$ et $R = 0$. Ainsi z vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -az - \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + cS\right) z.$$

2. a. Par dérivation d'un quotient et le calcul de la question 1.b, il vient que :
$$q' = \frac{x'S - xS'}{S^2} = \frac{x'}{S} - \frac{xS'}{S^2} = \frac{-ax - cS}{S} + \frac{qS(a+b+c)S}{S^2} = (b+c)q - c.$$
La fonction q est donc solution de l'équation $y' = (b+c)q - c$.

b. Puisque l'équation différentielle $y' = (b+c)q - c$ est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \geqslant 0,\ q(t) = Ke^{(b+c)t} + \frac{c}{b+c} = Ke^{-\frac{t}{8}} + \frac{1}{8}.$$
Puisque $q(0) = \dfrac{x(0)}{S(0)} = 1$ (on fait l'hypothèse qu'aucun bébé ne nait avec la variole), on trouve que $K + \dfrac{1}{8} = 1$, i.e. $K = \dfrac{7}{8}$. Ainsi :
$$\forall t \geqslant 0,\ q(t) = \frac{7}{8}e^{-\frac{t}{8}} + \frac{1}{8}.$$

3. a. Remarquons que x ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $H = \ln\left(\dfrac{z}{x}\right)$, alors :
$$H' = \frac{\frac{z'x - zx'}{x^2}}{\frac{z}{x}} = \frac{\frac{z'}{z}x - x'}{x} = \frac{x' + cS - x'}{x} = c\frac{S}{x} = \frac{c}{q}.$$
Ainsi : $\forall t \geqslant 0,\ \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{1}{64}\dfrac{8}{1+7e^{\frac{t}{8}}} = \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{1+7e^{\frac{t}{8}}}$.

b. L'égalité (7) est équivalente à $(\ln G)' = H' = \left(\dfrac{z}{x}\right)'$. En intégrant entre 0 et un instant $t \geqslant 0$, on trouve que $\ln(G(t)) - \ln(G(0)) = \dfrac{z}{x}(t) - \dfrac{z}{x}(0)$, i.e. :
$$\ln\left(\frac{z(t)}{x(t))}\right) = \frac{e^{\frac{t}{8}}}{1+7e^{\frac{t}{8}}} - \ln\left(\frac{1}{8}\right) = \ln\left(\frac{8e^{\frac{t}{8}}}{1+7e^{\frac{t}{8}}}\right)$$
puisque $G(0) = 1$ et $z(0) = x(0)$. Ainsi :
$$\forall t \geqslant 0,\ z(t) = \frac{8e^{\frac{t}{8}}}{1+7e^{\frac{t}{8}}}x(t).$$

4. En inoculant la variole aux individus de la première cohorte fictive, une proportion $\dfrac{199}{200}$ survivrait des suites de l'inoculation de la variole. Puisque les causes de mortalité de la seconde cohorte fictive sont que de la variole et les mêmes causes que celle de la première, on trouve que $y = \dfrac{199}{200}z$.

5. En s'inspirant de la question 3 de la partie 1 et en fixant $\Delta_t = 1$, la quantité :
$$\frac{\sum_{i=0}^{+\infty} t_i\left(y(t_i) - y(t_{i+1})\right)}{y_0} = \gamma \times \frac{\sum_{i=0}^{+\infty} t_i\left(z(t_i) - z(t_{i+1})\right)}{z_0}.$$
permet d'approcher l'espérance de vie de la seconde cohorte fictive.

Estimation de la fonction a

1. a. Il suffit d'ouvrir le fichier, lire successivement les deux premières lignes, fermer le fichier et renvoyer la liste des deux chaines de caractères représentant les deux lignes extraites.

```python
def extraction_ch():
    f = open("data.txt", "r")
    chaine1 = f.readline()
    chaine2 = f.readline()
    f.close()
    return [chaine1, chaine2]
```

b. On lit chaque caractère de la liste. Tant que ce n'est pas un espace, le caractère correspond correspond à l'une des décimales d'un nombre en cours de lecture. Si on lit un espace, la lecture du nombre est terminée, on convertir la chaine de caractères représentant le nombre en flottant. On n'oubliera pas de traiter séparément le dernier nombre puisque la chaine de caractère ne termine pas par un espace.

```python
def ch_vers_list(ch):
    L = []
    n = len(ch)
    sh = ""
    for k in range(0, n):
        if ch[k] != " ":
            sh = sh+ch[k]
        else:
            L.append(float(sh))
            sh = ""
    L.append(float(sh))
    return L
```

c. On propose ici une solution élégante renvoyant la liste des quotients en la définissant par compréhension.

```
def division(L1,L2):
    if len(L1) != len(L2):
        return False
    else:
        return [L1[k]/L2[k] for k in range(len(L1))]
```

d. On commence par extraire les deux lignes du fichier qu'on stocke dans deux chaines de caractères (`ch_morts` et `ch_vivants`), qu'on convertit ensuite en deux listes de nombres. On construit enfin la `Lnorm` à partir de ces deux listes.

```
[ch_morts, ch_vivants] = extraction_ch()
morts = ch_vers_list(ch_morts)
vivants = ch_vers_list(vivants)
Lnorm = division(morts,vivants)
```

2. a. (i) La quantité $\tilde{M}(\alpha,\beta)$ correspond graphiquement à la somme des distances au carrés de chacun des points du nuage $(t,\ell_t)_{t\in[\![0,83]\!]}$ aux points de même abscisse situés sur la droite d'équation $y=\alpha t+\beta$.
Minimiser $\tilde{M}$ revient donc à déterminer la droite de régression linéaire par la méthode des moindres carrés.

(ii) La quantité $M(\lambda,\mu,\gamma)$ correspond graphiquement à la somme des distances au carrés de chacun des points du nuage $(t,\ell_t)_{t\in[\![0,83]\!]}$ aux points de même abscisse situés sur la courbe d'équation $y=\lambda e^{-\mu t}+\gamma$.
Minimiser M revient déterminer, parmi les courbes d'équation $y=\lambda e^{-\mu t}+\gamma$, celle (si elle est unique, ce qui n'est a priori pas garanti) qui approche le mieux le nuage de points $(t,\ell_t)_{t\in[\![0,83]\!]}$ par la méthode des moindres carrés.

b. Puisque $\mu>0$, on remarque que sous l'hypothèse de validité du modèle exponentielle :

$$\lim_{t\to+\infty}\lambda e^{-\mu t}+\gamma=\gamma.$$

Par lecture graphique de la figure 1, on peut choisir $\gamma_0=0,01$.
En évaluant en $t=0$, on trouve graphiquement que $\lambda e^{-\mu\times 0}+\gamma=0,28$. On peut donc choisir $\lambda_0=0,27$.

c. La fonction M_mu est la fonction $\mu\to M(\lambda_0,\mu,\gamma_0)$.

d. Le tracé de la fonction M_mu montre que cette fonction atteint un minimum en approximativement $0,7$. Puisque la valeur théorique de μ est obtenue en minimisant M, on propose alors $\mu_0=0,7$.

3. a. On utilise la fonction `argmin2` :

```
def argmin3(f,x,y,z):
    meilleur_xy = argmin2(f,x,y)
    return argmin2(f,meilleur_xy, z)
```

b. On suit l'algorithme tel que décrit dans l'énoncé:

```
def minimum(f, A, B, eps):
    g = A
    d = B
    while d - g > eps:
        # calculs de xg et xd
        xg = g + (d-g)/3
        xd = d -  (d-g)/3
        # calcul de g et d
        if f(xg) < f(xd):
            d = xd
        elif f(xg) > f(xd):
            g = xg
        else:
            g, d = xg, xd
    return argmin3(f, g, d, (g+d)/2)
```

4. a. blabla

```
def test_croissant(L):
    n = len(L)
    for k in range(n-1):
        if L[k] > L[k+1]:
            return False
    return True
```

b. Il suffit de construire une liste de valeurs de la fonction `M_mu` sur un échantillon de l'intervalle $[0,8;3]$ puis de tester si les valeurs de cette liste sont rangées dans l'ordre croissant.

c. Après avoir vérifié que la fonction `M_mu` est bien croissante sur $[0,8;3]$, on réalise l'instruction `minimum (M_mu, 0, 0,8, 0.01)` renvoyant une approximation à 0.005 près de la valeur exacte du minimum de la fonction `M_mu`, appartenant à l'intervalle $[0;0,8]$.

d. Puisque la fonction $\mu \to M(\lambda_0, \mu, \gamma_0)$ est presque nul en μ_0, le modèle exponentiel $\ell_t = \lambda e^{-\mu t} + \gamma$ semble particulièrement adapté.

Puisque la liste `Lnorm` contient les rapports annuels du nombre d'individus morts d'une maladie autre que la variole sur le nombre d'individus vivants la même année, le rapport à l'instant t est selon le modèle de Bernoulli la quantité

$$\ell_t = \frac{a(t)S(t) + aR(t)}{S(t) + R(t)} = a(t).$$

Puisque le modèle exponentiel semble adapté pour modéliser $a(t)$ en fonction de l'instant t, l'hypothèse "a constant" n'est pas vraisemblable.

Modèle individu-centré

1. Puisqu'à l'instant $n = 0$, l'individu est supposé susceptible, $\mathbb{P}(X_0 = S) = 1$ et $\mathbb{P}(X_0 = R) = \mathbb{P}(X_0 = D) = 0$ et ainsi :

$$\mathbb{Z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $([X_0 = S], [X_0 = R], [X_0 = D])$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\mathbb{P}(X_1 = S) = \sum_{Z \in \{S,R,D\}} \mathbb{P}(X_0 = Z)\, \mathbb{P}_{[X_0 = Z]}(X_1 = S) = \mathbb{P}_{[X_0 = S]}(X_1 = S)$$

Puisque :

$$\mathbb{P}_{[X_0=S]}(X_1 = S) = 1 - \mathbb{P}_{[X_0=S]}(X_1 = R) - \mathbb{P}_{[X_0=S]}(X_1 = D) = 1-(a+c)-b = 1-(a+b+c),$$

on trouve que : $\mathbb{P}(X_1 = S) = 1 - (a+b+c)$

Par le même raisonnement, on trouve que : $\mathbb{P}(X_1 = R) = b\,\mathbb{P}(X_0 = S) = b + c$ et $\mathbb{P}(X_1 = D) = (a+c)\,\mathbb{P}(X_0 = S) = a + c$. On en déduit que :

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1-(a+b+c) \\ b \\ a+c \end{pmatrix}$$

2. a. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que $QZ_0 = Z_1$. La propriété est donc initialisée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $Z_n = Q^n Z_0$. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = S], [X_n = R], [X_n = D])$, on trouve de la même manière qu'à la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = S) &= \mathbb{P}(X_n = S)\, \mathbb{P}_{[X_n=S]}(X_{n+1} = S) \\
&= (1-(a+b+c))\, \mathbb{P}(X_n = S) \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = R) &= \mathbb{P}(X_n = S)\, \mathbb{P}_{[X_n=S]}(X_{n+1} = R) + \mathbb{P}(X_n = R)\, \mathbb{P}_{[X_n=R]}(X_{n+1} = R) \\
&= b\, \mathbb{P}(X_n = S) + (1-a)\, \mathbb{P}(X_n = R) \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = D) &= (a+c)\, \mathbb{P}(X_n = S) + a\, \mathbb{P}(X_n = R) + \mathbb{P}(X_n = D).
\end{aligned}$$

On en déduit que $Z_{n+1} = QZ_n = Q^{n+1}Z_0$. La propriété est donc héréditaire.

On en déduit donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = Q^n Z_0$.

b. La matrice Q étant triangulaire inférieure, on peut lire son spectre sur sa diagonale : Q admet donc pour valeurs propres 1, $1-a$ et $1-(a+b+c)$. Sous les hypothèses raisonnables $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $a+b+c > 0$ (car sinon tout individu serait contaminé par la variole ou mourrait de la variole) et en posant $\lambda_1 = 1-(a+b+c)$ et $\lambda_2 = 1-a$, on a bien $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$(A - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1-(a+b+c))x = 0 \\ bx - ay = 0 \\ (a+c)x + ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Ainsi : $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$(A - (1-a)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -(b+c)x = 0 \\ bx = 0 \\ (a+c)x + ay + az = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Ainsi : $\mathrm{Ker}(A - (1-a)I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Enfin :

$$(A-(1-(a+b+c)I_3)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} bx+(b+c)y=0 \\ (a+c)x+ay+(a+b+c)z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{b+c}{b}y \\ z=-\dfrac{-\frac{(a+c)(b+c)}{b}+a}{a+b+c}y=\dfrac{ac+bc+c^2}{b(a+b+c)}y=\dfrac{c}{b}y \end{cases}$$

Ainsi : $\mathrm{Ker}(A-(1-a)I_3)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-b-c\\ b\\ c\end{pmatrix}\right)$.

c. Puisque $Q\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet trois valeurs propres distinctes, Q est diagonalisable et, d'après les calculs précédents, $Q=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$ où $P=\begin{pmatrix}-b-c&0&0\\b&-1&0\\c&1&1\end{pmatrix}$ (la matrice P est inversible en tant que matrice de passage).

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$.

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases}(-b-c)x=u\\ bx-y=v\\ cx+y+z=w\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{b+c}u\\ y=-\dfrac{b}{b+c}u-v\\ z=\dfrac{c}{b+c}u+\dfrac{b}{b+c}u+v+w\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{b+c}u\\ y=-\dfrac{b}{b+c}u-v\\ z=u+v+w\end{cases}$$

On en déduit que $P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{b+c}&0&0\\-\frac{b}{b+c}&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

d. Montrons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

La propriété est initialisée car :

$$P\begin{pmatrix}\lambda_1^0&0&0\\0&\lambda_2^0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}Z_0=PI_3P^{-1}Z_0=I_3Z_0=Z_0.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $Z_n=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}Z_0$.

$$\begin{aligned} Z_{n+1}&=QZ_n\\ &=P\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}Z_0\\ &=P\begin{pmatrix}\lambda_1^{n+1}&0&0\\0&\lambda_2^{n+1}&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}Z_0.\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

On en déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Z_n=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}Z_0$.

e. Puisque $-1<\lambda_1<1$ et $-1<\lambda_2<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_1^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_2^n=0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=S)=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=R)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=D)=1$.

On interprète ce résultat de la manière suivante : l'individu étudié finit par mourir.

3. a. L'événement A_n correspond à :

$$\begin{aligned} A_n&=\overline{[X_n=D]}\cap[X_{n+1}=D]\\ &=([X_n=S]\cup[X_n=R])\cap[X_{n+1}=D]\\ &=([X_n=S]\cap[X_{n+1}=D])\cup([X_n=R]\cap[X_{n+1}=D])\end{aligned}$$

Puisque cette réunion est disjointe, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(X_n = S, X_{n+1} = D) + \mathbb{P}(X_n = R, X_{n+1} = D)\\
&= \mathbb{P}(X_n = S)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = D \mid X_n = S) + \mathbb{P}(X_n = R)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = D \mid X_n = R)\\
&= (a+c)\lambda_1^n + a\frac{-b\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c}\\
&= \frac{(a+c)(b+c) - ab}{b+c}\lambda_1^n + \frac{ab}{b+c}\lambda_2^n\\
&= \frac{c(a+b+c)}{b+c}\lambda_1^n + \frac{ab}{b+c}\lambda_2^n.
\end{aligned}$$

b. Soit $N \in \mathbb{N}$. En reconnaissant une somme partielle de série géométrique dérivée de raison ρ donc convergente (car $\rho \in]-1,1[$), on trouve que

$$\sum_{n=0}^{N} n\rho^n = \rho\sum_{n=1}^{N} n\rho^{n-1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \rho \times \frac{1}{(1-\rho)^2}.$$

Ainsi Σ est bien défini et $\Sigma = \dfrac{\rho}{(\rho-1)^2}$

c. Remarquons que $[T = n] = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étudions la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathbb{P}(T = n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{ab}{b+c} n\lambda_2^n$. Puisque $\lambda_2 = 1-a \in]0,1[$, la question précédente assure que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\,\mathbb{P}(T = n)$ converge (absolument) donc T admet une espérance par linéarité, égale à :

$$\mathcal{E} = \mathbb{E}(T) = \frac{ab}{b+c}\sum_{n=0}^{+\infty} n\lambda_2^n = \frac{ab}{b+c}\frac{\lambda_2}{(\lambda_2-1)^2} = \frac{b(1-a)}{a(b+c)}.$$

d. On trouve que $\mathcal{E} \approx 27,125$. L'espérance de vie calculée dans ce modèle est proche de l'espérance de vie réelle. L'hypothèse "a constant" semble donc vraisemblable dans le modèle individu-centré.