

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Calculatrices interdites.

PROBLÈME 1

Ce premier problème est relatif à l'étude de variables aléatoires réelles qui suivent une loi en lien avec les lois géométriques, binomiales et normales.

Dans la partie A, on étudie deux premières variables aléatoires réelles. Cette étude, généralisée en partie B, permet de montrer que les variables aléatoires étudiées suivent toutes la même loi. Enfin, en partie C, on établit des liens entre cette loi, la loi binomiale et la loi normale.

Ces trois parties ne sont pas indépendantes.

Dans tout le problème k désigne une entier naturel, n un entier naturel non nul et p un réel appartenant à $]0, 1[$. On note enfin $q = 1 - p$.

Partie A : Autour de la loi géométrique

Une équipe de géologues travaille en zone sismique et installe un sismomètre au sommet d'un volcan. Chaque jour, si ce sismomètre détecte une onde sismique, ce dernier envoie une alerte par satellite à un camp de base situé au pied du volcan.

On note X_1 la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours sans alerte avant une première alerte, par exemple si cette première alerte survient au troisième jour après l'installation du sismomètre alors X_1 prend la valeur 2.

On admet que ce sismomètre envoie au plus une alerte par jour, et que la probabilité que survienne une alerte est constante et égale à p , indépendante des résultats obtenus les jours précédents.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_1 noté $X_1(\Omega)$, et pour tout $k \in X_1(\Omega)$, calculer $P(X_1 = k)$.
- (b) En déduire que $1 + X_1$ suit la loi géométrique de paramètre p ce qu'on notera dorénavant $X_1 \leftrightarrow \mathcal{G}^{-1}(p)$.
2. Ce sismomètre étant extrêmement sensible, les géologues décident de mener des analyses complémentaires à partir d'une seconde alerte. Aussi on note X_2 la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours sans alerte avant cette seconde alerte, depuis l'installation du sismomètre. Par exemple, si une première alerte survient au troisième jour après l'installation de ce sismomètre et une seconde au septième jour alors X_2 prend la valeur 5.
- (a) Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $P(X_2 = k | X_1 = j)$.
- (b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_2 = k) = (k + 1)q^k p^2$$

Partie B : Généralisation de la situation précédente

On généralise l'étude précédente et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours sans alerte avant une n -ième alerte.

1. (a) Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{n+k}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n+j-1}{j}$$

(b) Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) = \binom{n+k-1}{k} q^k p^n.$$

On le notera dorénavant $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n, p)$.

2. Soit $(X_1^{(i)})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{G}^{-1}(p).$$

On cherche à démontrer par récurrence sur n que :

$$\sum_{i=1}^n X_1^{(i)} \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n, p).$$

- (a) Vérifier que le résultat est vrai pour $n = 1$ et après avoir posé l'hypothèse de récurrence, justifier que $\sum_{k=1}^n X_1^{(k)}$ et $X_1^{(n+1)}$ sont indépendantes.
- (b) Conclure.
- (c) Si X_n et X_m (avec $m \in \mathbb{N}^*$) sont deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(n, p)$ et $X_m \hookrightarrow \mathcal{B}^{-1}(m, p)$, que dire (sans démonstration) de $X_n + X_m$?

Partie C : Une loi binomiale et une loi normale

- 1. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note Y_m la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de jours avec alerte pendant les m premiers jours.
 - (a) Justifier que Y_{n+k} suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) Démontrer que les événements $(X_n > k)$ et $(Y_{n+k} < n)$ sont égaux.
- 2. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et Z_n une variable aléatoire réelle suivant une loi normale de paramètres la moyenne de X_n et la variance de X_n .
 - (a) Justifier que :

$$Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{nq}{p}, \frac{nq}{p^2}\right)$$

- (b) Énoncer précisément le théorème de la limite centrale et en déduire que les deux suites ci-dessous convergent vers une même limite ℓ qu'on donnera sous forme d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer :

$$\left(P\left(a < \frac{X_n - q}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad \left(P\left(a < \frac{Z_n - q}{\frac{\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}} < b\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

PROBLÈME 2

L'objectif de ce second problème est l'étude de deux populations en interaction.

Après avoir démontré deux résultats préliminaires en partie A, on étudie un système différentiel qui modélise l'évolution de ces deux populations en partie B. Cette étude est poursuivie en partie C où on applique les méthodes de l'algèbre linéaire pour se consacrer à un modèle discret dont on montrera les limites.

Les trois parties sont largement indépendantes.

Dans tout le problème, a, b, c et d désignent quatre réels strictement positifs. Si E et F sont des ensembles alors on note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E dans F .

Partie A : Résultats préliminaires

1. (a) Démontrer que $\ln(x) - x + 1 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- (b) En déduire que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad a \left(\ln \left(\frac{by}{a} \right) - \frac{by}{a} + 1 \right) \leq d \left(-\ln \left(\frac{cx}{d} \right) + \frac{cx}{d} - 1 \right).$$

2. On considère l'ensemble ci-dessous :

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_0 \end{pmatrix}, \quad (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

- (a) Démontrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
 - (b) Déterminer une base de \mathcal{E} . Quelle est la dimension de \mathcal{E} ?
3. Soient $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_2 & x_0 \end{pmatrix}$.
 - (a) Démontrer que si $x_1x_2 > 0$ alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
 - (b) Démontrer que si $x_1x_2 < 0$ alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais qu'elle l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
 - (c) Étudier la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ lorsque $x_1x_2 = 0$.

Partie B : Un système différentiel

On considère le système différentiel (\mathcal{S}_1) ci-dessous où x désigne l'effectif d'une population de bactéries en fonction du temps $t \in \mathbb{R}_+$ et y l'effectif d'une population de protozoaires en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$. Enfin, $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \mathbb{R}^2$ désigne les effectifs relevés à un instant $t_0 \in \mathbb{R}_+$:

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x(t_0) = \widetilde{x}_0 \\ y(t_0) = \widetilde{y}_0 \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} x'(t) = (a - by(t)) \times x(t) \\ y'(t) = (cx(t) - d) \times y(t) \end{cases} \end{cases}.$$

On admet le théorème suivant :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \quad \forall (\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists!(x, y) \in (\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))^2, \quad (x, y) \text{ solution de } (\mathcal{S}_1).$$

1. Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in \mathbb{R}^2$.
 - (a) Démontrer que si $\widetilde{x}_0 = 0$ alors $(x : t \mapsto 0, y : t \mapsto \widetilde{y}_0 e^{-d(t-t_0)})$ est l'unique couple solution de (\mathcal{S}_1) . Quel est l'unique couple solution si $\widetilde{y}_0 = 0$?
 - (b) Pour quelles conditions initiales \widetilde{x}_0 et \widetilde{y}_0 les solutions sont-elles constantes (c'est-à-dire pour lesquelles x et y sont deux fonctions constantes indépendantes du temps) ?
2. On suppose dorénavant que $\widetilde{x}_0 > 0$ et $\widetilde{y}_0 > 0$.
 - (a) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que si (x, y) est solution de (\mathcal{S}_1) alors ni x ni y ne s'annulent.
 - (b) En déduire que si (x, y) est solution de (\mathcal{S}_1) alors x et y sont à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .
3. On note $\varphi \in \mathcal{F}((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \varphi(x, y) = cx - d \ln(x) + by - a \ln(y).$$

On admet que φ est de classe \mathcal{C}^1 et qu'elle admet au moins un extremum.

- (a) Calculer les dérivées partielles premières de φ .
 - (b) Démontrer que φ admet exactement un extremum et préciser en quel point.
 - (c) Démontrer qu'il s'agit d'un minimum (on utilisera la partie A).
4. Démontrer que si (x, y) est un couple solution de (\mathcal{S}_1) alors $t \mapsto \varphi(x(t), y(t))$ est une fonction constante sur \mathbb{R}_+ .

Partie C : Un modèle discret

Sauf pour quelques cas particuliers, on ne sait pas résoudre (\mathcal{S}_1) .

On se propose donc d'utiliser un modèle discret selon lequel x_n désigne l'effectif de cette population de bactéries et y_n celui de cette population de protozoaires en fonction de n , nombre de jours écoulés depuis un instant initial correspondant à $n = 0$. On fait les hypothèses suivantes :

- À l'instant $n = 0$, l'effectif des bactéries est égal à \widetilde{x}_0 .
- les bactéries se développent selon un taux journalier de natalité égal à a .
- les bactéries meurent selon un taux journalier de mortalité égal à by_n .

1. À l'aide des hypothèses précédentes et en formulant précisément des hypothèses relatives aux protozoaires, démontrer que le couple $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est solution du système ci-dessous :

$$(\mathcal{S}_2) \begin{cases} x_0 = \widetilde{x}_0 \\ y_0 = \widetilde{y}_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} - x_n = (a - by_n) \times x_n \\ y_{n+1} - y_n = (cx_n - d) \times y_n \end{cases} \end{cases} .$$

2. On considère dorénavant que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termes généraux $u_n = x_n - \frac{d}{c}$ et $v_n = y_n - \frac{a}{b}$ sont bornées et que les quantités $bu_n v_n$ et $cu_n v_n$ sont négligeables.
 - (a) Démontrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \text{ en posant } \alpha = \frac{bd}{c} \text{ et } \beta = \frac{ac}{b}$$

- (b) À l'aide de la partie A, étudier la diagonalisabilité de A .
- (c) Vérifier que les seules valeurs propres de A sont les nombres complexes conjugués $1 + i\sqrt{\alpha\beta}$ et $1 - i\sqrt{\alpha\beta}$.

3. On note dorénavant I la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ (avec $\rho > 0$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$) les deux valeurs propres de A .
- (a) Démontrer que $\alpha\beta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$.
- (b) En déduire que $(A - I)^2 = -\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} I$.
- (c) Démontrer enfin, par récurrence sur n , que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{\sin(\theta) \cos^n(\theta)} (\cos(\theta) \sin(n\theta)A - \sin((n-1)\theta)I).$$

4. (a) Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des suites de termes généraux $\sin(\theta) \cos^n(\theta)u_n$ et $\sin(\theta) \cos^n(\theta)v_n$.
- (b) Les résultats obtenus vous paraissent-ils conformes aux hypothèses du modèle utilisé ?