SESSION 2022

CONCOURS G2E

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont interdites. Les téléphones portables et autres «smartphones» doivent être éteints au cours de l'épreuve et ne doivent en aucun cas être utilisés même à titre de montre.
L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est strictement interdit.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il en fait mention dans sa copie et poursuit sa composition. Dans ce cas, il indique clairement la raison des initiatives qu'il est amené à prendre.
Les candidats doivent respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.
La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits.
Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation des différents schémas.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, on se place dans le plan usuel muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. $(x'Ox)$ désigne l'axe des abscisses et $(y'Oy)$ l'axe des ordonnées.

On rappelle que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $[a, b]$ désigne l'intervalle des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$, cette notation implique implicitement que $a \leqslant b$. De même $[a, b[$ désigne l'intervalle des $x \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x < b$ (et alors $a < b$).

La partie A de ce premier problème est consacrée aux calculs de trois intégrales par différentes méthodes, le dernier de ces calculs est repris et complété en partie B. Enfin, on calcule en partie C la probabilité d'un événement obtenu à partir d'une situation géométrique. Les trois parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Calculs d'intégrales par différentes méthodes

1. (a) Donner l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (b) En déduire l'allure de la courbe représentative de $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ définie sur $[0, 1]$.
   (c) Démontrer que f est continue sur $[0, 1]$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.
2. (a) Quelle est l'aire du disque dont $\mathcal{C}$ est la circonférence ?

(b) En déduire que :
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

3. (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression de $\cos(2\theta)$ et en déduire une expression de $\sin^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.

   (b) En effectuant le changement de variable $x = \cos(\theta)$, retrouver la valeur de :
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. (a) À l'aide d'une intégration par parties, en déduire que l'intégrale généralisée ci-dessous converge et préciser sa valeur.
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

   (b) À l'aide des deux intégrales calculées précédemment (questions 3.(b) et 4.(a)), en déduire enfin que :
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

   (c) Retrouver ce dernier résultat à l'aide d'un changement de variable.

Partie B : Trigonométrie réciproque

On rappelle que pour tout $c \in [0,1]$, l'équation $\cos(x) = c$ d'inconnue $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ admet une unique solution notée $\arccos(c)$, autrement dit :
$$\forall c \in [0,1], \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \cos(x) = c \Leftrightarrow x = \arccos(c).$$

5. (a) En résolvant certaines équations judicieusement choisies, calculer $\arccos(0)$, $\arccos(\frac{1}{2})$ et $\arccos(1)$.

   (b) Soit $c \in [0,1]$. Quelles sont les solutions de l'équation $\cos(x) = c$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$?

6. On admet que la fonction arccos est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ et que sa fonction dérivée est définie par :
$$\forall x \in [0,1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   (a) Retrouver alors le résultat obtenu en question A 4.(b).

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout segment $[a,b] \subset [0,1]$ on a :
$$\int_a^b \arccos(x)\,\mathrm{d}x = b\arccos(b) - a\arccos(a) + \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}.$$

Partie C : Avec deux variables aléatoires à densité

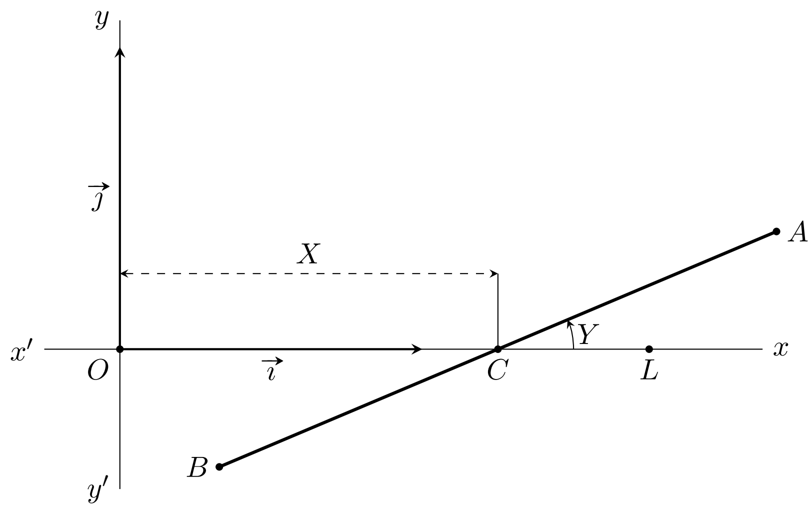
On se place dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit ℓ une longueur supérieure ou égale à 1, on note L le point de coordonnées $(\ell, 0)$. De plus, $[AB]$ désigne un segment de longueur 2 et de milieu C.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on choisit la position du point C au hasard dans le segment $[OL]$ et on place aléatoirement le segment $[AB]$ de sorte qu'il soit effectivement centré en C.

Plus précisément, on considère que l'abscisse de C est représenté par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[0, \ell]$. On considère également que l'angle $(\overrightarrow{CL}, \overrightarrow{CA})$ est représenté par une variable aléatoire Y indépendante de X et qui suit également une loi uniforme (voir figure ci-dessous).

Dans cette partie, on s'intéresse à l'événement $T =$«le segment $[AB]$ touche l'axe des ordonnées», autrement dit :

$$T = \big([AB] \cap (y'Oy) \neq \varnothing\big).$$



7. (a) Justifier que l'on peut, sans restreindre les hypothèses du préambule, supposer que Y suit la loi uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (on pourra raisonner par symétrie).
   (b) Donner sans justification la loi de $-X$. En donner également une fonction densité.
8. On rappelle que X suit la loi uniforme sur $[0, \ell]$ et on suppose dorénavant que Y suit la loi uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Démontrer que l'événement T est réalisé si, et seulement si :

$$\cos(Y) - X \geqslant 0.$$

9. (a) Quelles sont les valeurs prises par $\cos(Y)$? Déterminer la fonction de répartition de $\cos(Y)$.
   (b) En déduire que $\cos(Y)$ est une variable admettant une densité et préciser une fonction densité de $\cos(Y)$.
10. On rappelle que si A et B sont deux variables indépendantes à densité f_A et f_B alors $A + B$ admet également une densité f_{A+B} donnée par le produit de convolution ci-dessous :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{A+B}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(t) f_B(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(x-t) f_B(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Quelles sont les valeurs prises par $\cos(Y) - X$?
   (b) Déduire de ce qui précède la probabilité de l'événement T.

PROBLÈME 2

Dans tout ce deuxième problème, on se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices de tailles 2×2 à coefficients réels). On note I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si A désigne une matrice, on note $A^\top$ sa transposée et si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $\det(A)$ désigne le déterminant de A.

On pourra confondre $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et on rappelle que si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de représentations dans la base canonique $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ alors le produit scalaire usuel de x et y peut s'écrire de façon matricielle sous la forme :

$$X^\top Y.$$

Dans la partie A du problème, on décrit certains ensembles inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Dans la partie B, on utilise ces ensembles pour décrire l'ensemble des matrices qui commutent avec leur transposée. Enfin, dans la partie C, on calcule des probabilités relatives aux ensembles étudiés précédemment. Les trois parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Matrices symétriques et antisymétriques

L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, il est défini par :

$$\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad A = A^\top\right\}.$$

De façon analogue, on considère l'ensemble des matrices dites antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il est noté $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ et est défini par :

$$\mathcal{A}_2(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad A = -A^\top\right\}.$$

1. (a) Démontrer que :

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c.$$

   (b) En déduire que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

2. On note dorénavant :

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}.$$

   Dans cette question 2. uniquement, A désigne une matrice appartenant à $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Que vaut $A^\top A$?

   (b) Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})^2$. Démontrer que si X et Y sont orthogonaux alors AX et AY sont orthogonaux (et c'est pourquoi A est dite orthogonale).

3. On note enfin :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Vérifier que $J \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et calculer J^2.

   (b) En déduire que J n'est pas diagonalisable.

4. (a) Exprimer $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ à l'aide de J et en déduire que $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base et la dimension.

   (b) En considérant $I_2 + J$, démontrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie B : Matrices qui commutent avec leur transposée

Dans la suite de ce problème on considère l'ensemble des matrices qui commutent avec leur transposée :

$$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad AA^\top = A^\top A\right\}.$$

5. Proposer un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$.
6. (a) Démontrer que :
$$\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_2(\mathbb{R}).$$
   (b) En considérant à nouveau $I_2 + J$, vérifier que :
$$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$
7. (a) Démontrer que :
$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d).$$
   (b) En déduire que :
$$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \operatorname{Vect}(I_2, J).$$
   (c) Déterminer enfin $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cap \operatorname{Vect}(I_2, J)$.

Partie C : Calculs de probabilités

Dans cette partie du problème, X_1, X_2, X_3 et X_4 désignent quatre variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes définies sur un même univers Ω suivant toutes la loi uniforme sur $[\![-1, 1]\!]$, autrement dit :

$$\forall i \in [\![1, 4]\!], \quad P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_3(\omega) & X_4(\omega) \end{pmatrix}.$$

8. (a) Démontrer que pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, X_i^2 suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
   (b) Donner la loi de probabilité de $X_i X_j$ pour tout $(i, j) \in [\![1, 4]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (c) En déduire que :
$$P\Big(\det(A) = 0\Big) = \frac{11}{27}.$$
9. (a) Démontrer que :
$$P\Big(A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})\Big) = \frac{1}{3}.$$
   (b) Calculer également $P\Big(A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})\Big)$.
10. (a) Démontrer que :
$$P\Big(A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R})\Big) = \frac{11}{27}.$$
   (b) Calculer enfin la probabilité conditionnelle ci-dessous :
$$P\Big(A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{R}) \,|\, \det(A) = 0\Big).$$