7 - Applications linéaires

1 Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F.
Alors $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

- A Vrai
- [x] Faux

---

2 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est fausse ?

- A Le rang de f est la dimension de son image
- [x] Le rang de f est égal à la dimension de l'espace engendré par une base de E.
- C Le rang de f est majoré par $\dim E$
- D $\mathrm{rg}\, f = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, f$ si E est de dimension finie.

---

3 Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ des bases respectives de trois espaces vectoriels E, F et G.
Soient $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- A $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_1}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_2}(v)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}}$
- B $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_1}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_2}(u)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}}$
- [x] $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_1}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_2}(u)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}}$
- D $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}_1}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}(v)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3 \leftarrow \mathcal{B}}$

---

4 On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z) \end{array}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est fausse ?

- A $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((-3, 8, -4), (-1, 3, -1), ($
- B $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}((1, -2, 1))$
- [x] $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$
- D $\mathrm{rg}(g) = 2$

---

5 Soient E et F deux espaces vectoriels et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$.
Si f et g sont bijectives alors :

- A $g^{-1} \circ f^{-1}$ est l'isomorphisme réciproque de $g \circ f$
- B $f \circ g$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(F, E)$
- [x] $f \circ g$ est un automorphisme de F
- D E et F sont de même dimension finie