Agro A 2018 : corrigé

Durée : 2h30

Calculatrices interdites

Exercice

1. La fonction f est définie par deux formules différentes, une pour $\mathbb{R}_-$ et une pour $\mathbb{R}_+^*$; on constate qu'elle est continue en 0 (le point où on change de formule) puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0 = \lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$.

   La fonction f est constante sur $\mathbb{R}_-$. Il y a seulement à l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$, où elle est définie par $f(t) = \frac{t}{c^2} e^{-t^2/(2c^2)}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont, et sa dérivée vaut :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{c^2} e^{-t^2/(2c^2)} + \frac{t}{c^2} \times \left(-\frac{2t}{2c^2}\right) \times e^{-t^2/(2c^2)} \\ &= \left(\frac{c^2 - t^2}{c^4}\right) e^{-t^2/(2c^2)} \end{aligned}$$

   Cette dérivée est du signe de $c^2 - t^2$, donc positive pour $0 < t \leq c$ et négative pour $t \geq c$. La fonction f est donc croissante jusqu'à c, puis décroissante. Elle admet donc un maximum en c, qui vaut $f(c) = \frac{1}{c} e^{-1/2}$.
   En $+\infty$, on a une forme indéterminée du type $+\infty \times 0$; on pose, pour $t > 0$, $x = t^2/(2c^2)$, ce qui donne $t = c\sqrt{2}\sqrt{x}$, et $f(t) = \dfrac{c\sqrt{2}\sqrt{x}}{c^2} e^{-x}$; on a alors $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{c}\sqrt{x} e^{-x} = 0$ par croissance comparée.
   Ce graphe a été tracé en python à l'aide du code suivant, pour $c = 1$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(c):
    X = np.linspace(0,10,1000)
    Y = (X/c**2)*np.exp(-X**2/(2*c**2))
    plt.clf()
    plt.plot(X,Y)
    plt.plot([-2,0],[0,0])
```

2. Il s'agit de vérifier trois points :
   — que la fonction f est positive : c'est visiblement le cas ;
   — qu'elle est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points : c'est le cas, elle est même continue sur $\mathbb{R}$ tout entier ;
   — et que son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1, on le vérifie : sous réserve de convergence, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{c^2} e^{-t^2/(2c^2)} dt \\ &= \left[-e^{-t^2/(2c^2)}\right]_0^{+\infty} \\ &= -0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   La fonction f est bien une densité de probabilité.

3. a. Cette intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$.

   b. On fait le changement de variable $u(t) = t/c$, possible car u est une fonction de t de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone ; on a $du/dt = 1/c$, et $u(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$. D'après le théorème de changement de variable dans les intégrales généralisées, les intégrales suivantes sont de même nature, et de même valeur si elles convergent :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/(2c^2)} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} \times c du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} \times c du \quad \text{par parité} \\ &= c\sqrt{2\pi}/2 \end{aligned}$$

   Donc l'intégrale proposée converge, et vaut $c\sqrt{\pi/2}$.

c. La variable X admet une espérance si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge ; on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}dt \\ &= \int_0^{+\infty} t\times\frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}dt\end{aligned}$$

On réalise une intégration par parties : toutes les fonctions écrites sont bien continues, et on a donc sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \left[t\times\left(-e^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 1\times e^{-t^2/(2c^2)}dt$$

Le premier terme converge par croissance comparée, le deuxième converge d'après la question précédente ; donc X admet bien une espérance. La valeur n'est pas demandée mais on l'a sous les yeux : $E(X) = 0 + c\sqrt{\pi/2}$.

4. On suppose que X^n admet une espérance, et on utilise le théorème de transfert pour montrer que X^{n+2} admet alors une espérance. Toutes les fonctions écrites sont positives sur $\mathbb{R}_+$ donc la convergence, si elle a lieu, est absolue. On a donc, sous réserve de convergence, et grâce à une intégration par parties analogue à la précédente :

$$\begin{aligned}E(X^{n+2}) &= \int_0^{+\infty} t^{n+2}\times\frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}dt \\ &= \left[t^{n+2}\times\left(-e^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}(n+2)t^{n+1}\times e^{-t^2/(2c^2)}dt \\ &= \left[t^{n+2}\times\left(-e^{-t^2/(2c^2)}\right)\right]_0^{+\infty} + (n+2)c^2\int_0^{+\infty} t^n\times\frac{t}{c^2}e^{-t^2/(2c^2)}dt\end{aligned}$$

Le premier terme converge par croissance comparée, et vaut 0. Le deuxième terme converge par hypothèse, et vaut $(n+2)c^2E(X^n)$. Donc X^{n+2} admet une espérance, et cette espérance est égale à $(n+2)c^2E(X^n)$.

5. — Initialisation : pour $n = 0$, il s'agit de montrer que $E(X^0) = 2^0c^00!$ i.e. que $E(1) = 1$: c'est vrai ; et que $E(X^1) = \sqrt{2\pi}\frac{1!c^1}{2^11!}$; on a vu en 3)c) que $E(X) = c\sqrt{2\pi}/2$, ce qui est bien la valeur voulue.

— Hérédité : supposons les deux relations vraies. On calcule alors :

$$\begin{aligned}E(X^{2n+2}) &= c^2(2n+2)E(X^{2n}) \\ &= c^2(2n+2)2^nc^{2n}n! \\ &= c^{2n+2}2(n+1)2^nn! \\ &= c^{2n+2}2^{n+1}(n+1)!\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^{2n+3}) &= c^2(2n+3)E(X^{2n+1}) \\ &= c^2(2n+3)\sqrt{2\pi}\frac{(2n+1)!c^{2n+1}}{2^{n+1}n!} \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{(2n+2)2^{n+1}n!} \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{2(n+1)2^{n+1}n!} \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(2n+3)!c^{2n+3}}{2^{(n+1)+1}(n+1)!}\end{aligned}$$

— Par le principe de récurrence, les deux formules sont donc vraies pour tout entier naturel n.

6. a. Soit X une variable aléatoire, et soit a un réel strictement positif. Alors on a :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

b. On a $E(X^2) = 2^1c^21! = 2c^2$ d'après la question 5), d'où

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 2c^2 - (c\sqrt{\pi/2})^2 \\ &= c^2(2 - \pi/2) \\ &= c^2\frac{4-\pi}{2}\end{aligned}$$

c. On transforme l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour avoir une probabilité « supérieure à »plutôt que « inférieure à » :

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} &\iff P(X - E(X) \geq a \text{ ou } X - E(X) \leq -a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \\ &\iff 1 - P(X - E(X) < a \text{ et } X - E(X) > -a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \\ &\iff 1 - P(E(X) - a < X < E(X) + a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \\ &\iff P(X \in]E(X) - a, E(X) + a[) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2} \end{aligned}$$

Pour a fixé, si on pose $\alpha = E(X) - a$ et $\beta = E(X) + a$, on a donc $P(X \in]\alpha, \beta[) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}$; et c'est encore vrai avec l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$ puisque la probabilité qu'une variable à densité prenne une valeur réelle donnée est nulle.
Pour avoir $P(X \in]\alpha, \beta[) \geq 99\%$, il suffit donc d'avoir $1 - \frac{V(X)}{a^2} \geq 99\%$; on simplifie :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{V(X)}{a^2} \geq 99\% &\iff \frac{V(X)}{a^2} \leq 0,01 \\ &\iff a^2 \geq 100V(X) \\ &\iff a \geq 10\sigma(X) \end{aligned}$$

On peut donc prendre

$$\alpha = E(X) - 10\sigma(X) = c\sqrt{\pi/2} - 10c\sqrt{\frac{4-\pi}{2}} ; \beta = E(X) + 10\sigma(X) = c\sqrt{\pi/2} + 10c\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}.$$

7.

$$P(X \in [0, \gamma]) = \int_0^\gamma \frac{t}{c^2} e^{-t^2/(2c^2} dt = \left[-e^{-t^2/(2c^2)}\right]_0^\gamma = 1 - e^{-\gamma^2/(2c^2)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P(X \in [0, \gamma]) = 99\% &\iff 1 - e^{-\gamma^2/(2c^2)} = 99\% \\ &\iff e^{-\gamma^2/(2c^2)} = 0,01 \\ &\iff -\gamma^2/(2c^2) = \ln(1/100) \\ &\iff \gamma^2 = 2c^2 \ln(100) = 4c^2 \ln(10) \\ &\iff \gamma = 2c\sqrt{\ln(10)} \end{aligned}$$

8. D'après l'inégalité donnée par l'énoncé, on a $\alpha < 0$; on a donc, puisque la densité de X est nulle sur $\mathbb{R}_-$,

$$P(X \in [\alpha, \beta]) = P(X \in [0, \beta]) \geq 99\% = P(X \in [0, \gamma])$$

soit, en notant F la fonction de répartition de X :

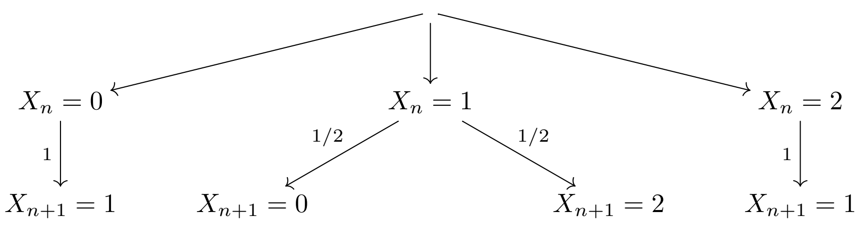
$$F(\beta) \geq F(\gamma).$$

Or les fonctions de répartition sont croissantes, donc $\beta \geq \gamma$.
L'intervalle $[0, \gamma]$ est donc inclus dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

Problème

I. Matrice de transition

1. a. Avec $N = 2$, on a $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix}$.
On considère l'arbre de probabilité suivant :



Explication des probabilités écrites sur les branches :

— Lorsque $X_n = 0$, l'urne U_1 ne contient aucune boule, or le nombre tiré est 1 ou 2 (nombre entre 1 et N dans le cas général), donc on déplacera forcément une boule de l'urne U_2 vers l'urne U_1, et X_{n+1} prend la valeur 1.

— Lorsque $X_n = 1$, l'urne U_1 contient une boule, donc si on fait 1 (probabilité 1/2), cette boule est déplacée vers l'urne U_2 et X_{n+1} prend alors la valeur 0, sinon (probabilité 1/2 aussi), c'est la boule de l'urne U_2 qui vient dans l'urne U_1 et X_{n+1} vaudra 2.

— Lorsque $X_n = 2$, on déplace forcément une boule de l'urne U_1 vers l'urne U_2 donc X_{n+1} prend la valeur 1.

On lit sur l'arbre les formules suivantes :

— $P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}P(X_n = 1)$;

— $P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0) + P(X_n = 2)$;

— $P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1)$.

Ces trois égalités correspondent bien au produit matriciel $Y_{n+1} = A.Y_n$, avec la matrice A annoncée.

b. On va déterminer le spectre de A_2. On sait qu'un réel λ est valeur propre de A_2 si et seulement si le rang de $A_2 - \lambda I_3$ est strictement inférieur à 3 ; on détermine ce rang par pivot.

$$\begin{aligned}
rg(A_2 - \lambda I_3) &= rg\begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} - \lambda^2 & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{C_2 \leftrightarrow C_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda & \frac{1}{2} - \lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $rg(A_2 - \lambda I_3) < 3 \iff \lambda = 0$ ou $1 - \lambda^2 = 0$. Le spectre de A_2 est donc $\{0; 1; -1\}$.
La matrice A_2 est d'ordre 3 et admet 3 valeurs propres distinctes : elle est donc diagonalisable.

2. Notons $(a_{i,j})$ les coefficients de la matrice A, avec i et j entiers entre 0 et N. On va montrer que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a $Y_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{N} a_{k,j} Y_{n,j}$ (c'est la formule du produit matriciel). On distingue les valeurs $k = 0$ et $k = N$ des autres, car ce sont des cas particuliers (comme on a vu avec $N = 2$). Pour tout entier n, on notera D_n le résultat du tirage aléatoire de l'entier qui permet de réaliser le n-ième échange ; et on notera $U_1 \longrightarrow U_2$ et $U_2 \longrightarrow U_1$ respectivement le fait de déplacer une boule de l'urne U_1 vers l'urne U_2 ou de l'urne U_2 vers l'urne U_1.

— Pour $k = 0$: l'événement $X_{n+1} = 0$ ne peut se produire que si $X_n = 1$ (il faut vider l'urne U_1), on a donc :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = 0) &= P((X_n = 1) \cap (U_1 \longrightarrow U_2) \\
&= P_{X_n=1}(U_1 \longrightarrow U_2)P(X_n = 1) \\
&= P(D_{n+1} = 1)P(X_n = 1) \\
&= \frac{1}{N} Y_{n,1}
\end{aligned}$$

C'est bien l'égalité voulue pour démontrer l'égalité matricielle au niveau de la première ligne (ligne $k = 0$).

— Pour $k = N$: l'événement $X_{n+1} = N$ ne peut se produire que si $X_n = N - 1$, on a donc :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = N) &= P((X_n = N - 1) \cap (U_2 \longrightarrow U_1) \\
&= P_{X_n=N-1}(U_2 \longrightarrow U_1)P(X_n = N - 1) \\
&= P(D_{n+1} = N)P(X_n = N - 1) \\
&= \frac{1}{N} Y_{n,N-1}
\end{aligned}$$

ce qui correspond bien aux coefficients de la dernière ligne de A.

— Pour $1 \leq k \leq N-1$: l'événement $X_{n+1} = k$ ne peut se produire que si $X_n = k-1$ ou $X_n = k+1$ (on ne peut ajouter ou enlever qu'une boule à chaque étape), on a donc :

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = k) &= P(((X_n = k-1) \cap (U_2 \longrightarrow U_1)) \cup ((X_n = k+1) \cap (U_1 \longrightarrow U_2))) \\
&= P((X_n = k-1) \cap (U_2 \longrightarrow U_1)) + P((X_n = k+1) \cap (U_1 \longrightarrow U_2))) \\
&= P_{X_n = k-1}(U_2 \longrightarrow U_1)P(X_n = k-1) + P_{X_n = k+1}(U_1 \longrightarrow U_2)P(X_n = k+1) \\
&= P(D_{n+1} \in [\![k, N]\!])P(X_n = k-1) + P(D_{n+1} \in [\![1, k+1]\!])P(X_n = k+1) \\
&= \frac{N-k+1}{N}Y_{n,k-1} + \frac{k+1}{N}Y_{n,k+1}
\end{aligned}$$

Là encore, on reconnaît les coefficients de A : les $\frac{N-(k-1)}{N}$ sous la diagonale, et les $\frac{k+1}{N}$ au-dessus.

On a donc bien montré que $Y_{n+1} = A.Y_n$, en étudiant chaque ligne de cette égalité matricielle.

3. Notons F_1 l'espace propre associé à la valeur propre 1 de ${}^tA$.

— Cas $N = 2$: ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; on sait que $F_1 = Ker({}^tA - I_3) = Ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F_1 \iff \begin{cases} -x+y=0 \\ (1/2)x - y + (1/2)z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$

Ainsi, $F_1 = Vect((1,1,1))$.

— Cas $N = 3$:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; ${}^tA - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a donc :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F_1 \iff \begin{cases} -x+y=0 \\ (1/3)x - y + (2/3)z = 0 \\ (2/3)y - z + (1/3)t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = z \\ (2/3)y - z + (1/3)t = 0 \\ z = t \end{cases} \iff x = y = z = t.$

Ainsi, $F_1 = Vect((1,1,1,1))$.

4. On peut conjecturer que le vecteur V_1 dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est vecteur propre de ${}^tA$ pour la valeur propre 1 ; pour le vérifier, il faut montrer que ${}^tA.V_1 = V_1$, ce qui est équivalent, en transposant, à ${}^tV_1.A = {}^tV_1$. On peut remarquer que les coordonnées du vecteur ${}^tV_1.A$ sont les sommes des coefficients des colonnes de A (du fait que toutes les coordonnées de V_1 sont égales à 1). Or on voit sur la matrice A que la somme des coefficients de la colonne j vaut :

— 1 pour $j = 0$ et $j = N$ car ces colonnes ont un seul coefficient non nul et il vaut 1 ;

— $j/N + (N-j)/N$, soit encore 1, pour j entre 1 et $N-1$.

Donc on a bien ${}^tV_1.A = {}^tV_1$, et donc 1 est valeur propre pour ${}^tA$, avec V_1 pour vecteur propre.

5. La matrice ${}^tA - I_{N+1}$ n'est pas inversible puisque son noyau est l'espace propre associé à la valeur propre 1 de ${}^tA$, et donc il n'est pas réduit à $\{0\}$. Or ${}^tA - I_{N+1} = {}^t(A - I_{N+1})$ donc cette matrice n'est pas inversible.
On sait qu'une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est, donc $A - I_{N+1}$ est aussi non inversible, donc son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc 1 est valeur propre de A.

II. Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

1. La variable $X_{n+1} - X_n$ est la variation du nombre de boules dans l'urne U_1 ; or le nombre de boules dans cette urne ne peut qu'augmenter ou diminuer de 1, donc la variable $X_{n+1} - X_n$ ne peut prendre que les valeurs 1 et -1.

2. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet proposé par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}-X_n) &= 1\times P(X_{n+1}-X_n=1)+(-1)\times P(X_{n+1}-X_n=-1)\\
&= \sum_{k=0}^{N} P_{X_n=k}(U_2\longrightarrow U_1)P(X_n=k)-\sum_{k=0}^{N} P_{X_n=k}(U_1\longrightarrow U_2)P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{N} P_{X_n=k}(D_{n+1}\geq k+1)P(X_n=k)-\sum_{k=0}^{N} P_{X_n=k}(D_{n+1}\leq k)P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{N}(P_{X_n=k}(D_{n+1}\geq k+1)-P_{X_n=k}(D_{n+1}\leq k))P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{N}(\frac{N-k}{N}-\frac{k}{N})P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{N}(1-2\frac{k}{N})P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{N}P(X_n=k)-\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N}kP(X_n=k)\\
&= 1-\frac{2}{N}E(X_n)
\end{aligned}$$

3. Par linéarité de l'espérance, on a donc $E(X_{n+1})-E(X_n)=1-\frac{2}{N}E(X_n)$, d'où $E(X_{n+1})=1+(1-\frac{2}{N})E(X_n)$. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On utilise une des méthodes du cours pour trouver l'expression de $E(X_n)$: on commence par chercher un réel ℓ tel que $\ell=1+(1-\frac{2}{N})\ell$: on trouve $\ell=\frac{N}{2}$.
On pose $u_n=E(X_n)-\ell$. On a alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= E(X_{n+1})-\ell\\
&= 1+(1-\frac{2}{N})(u_n+\ell)-\ell\\
&= (1-\frac{2}{N})u_n
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique, de raison $1-\frac{2}{N}$. On a donc $u_n=(1-\frac{2}{N})^n u_0$ d'où

$$E(X_n)=\left(1-\frac{2}{N}\right)^n\left(E(X_0)-\frac{N}{2}\right)+\frac{N}{2}.$$

4. On a $\left|1-\frac{2}{N}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{N}\right)^n=0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}E(X_n)=\frac{N}{2}.$$

Après un grand nombre d'échanges, les effectifs s'équilibrent entre les deux urnes. On pouvait s'y attendre puisque lorsque l'effectif d'une urne est plus grand que celui de l'autre, on a plus de chances de déplacer une boule vers l'urne qui en contient le moins.

III. Étude de la probabilité stationnaire

1. D'après la matrice A, on a :

$$X\in E_1 \iff \begin{cases}(1/N)x_1=x_0\\ x_0+(2/N)x_2=x_1\\ ((N-1)/N)x_1+(3/N)x_3=x_2\\ \dots\\ (2/N)x_{N-2}+x_N=x_{N-1}\\ (1/N)x_{N-1}=x_N\end{cases}$$

On va démontrer la relation demandée par récurrence forte sur k.

— Pour $k=0$, la relation est vérifiée, car $\binom{N}{0}=1$; pour $k=1$, la première ligne du système ci-dessus donne $x_1=Nx_0=\binom{N}{1}x_0$.

— Supposons que pour un $k \in [\![0, N]\!]$ donné, on ait $\forall i \leq k, x_i = \binom{N}{i} x_0$. Sur la ligne $k+1$ du système ci-dessus, on a :

$$\frac{N-(k-1)}{N} x_{k-1} + \frac{k+1}{N} x_{k+1} = x_k$$

d'où :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \frac{N}{k+1}\left(x_k - \frac{N-k+1}{N} x_{k-1}\right) \\
&= \frac{N}{k+1}\left(\binom{N}{k} - \frac{N-k+1}{N}\binom{N}{k-1}\right) x_0 \\
&= \frac{N}{k+1}\left(\frac{N!}{k!(N-k)!} - \frac{N-k+1}{N}\frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!}\right) x_0 \\
&= \frac{N}{k+1}\left(\frac{N!}{k!(N-k)!} - \frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}\right) x_0 \\
&= \frac{N}{k+1}\frac{(N-1)!}{(k-1)!(N-k)!}\left(\frac{N}{k} - 1\right) x_0 \\
&= \frac{N!}{(k+1)!(N-k)!}(N-k) x_0 \\
&= \frac{N!}{(k+1)!(N-k-1)!} x_0 \\
&= \binom{N}{k+1} x_0
\end{aligned}$$

— Donc par récurrence, on a bien $x_k = \binom{N}{k} x_0$ pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.

Remarque : on n'a pas utilisé la $(N+1)$-ième ligne du système, mais elle est forcément compatible avec les autres puisqu'on sait que 1 est valeur propre de A. (On voit tout de suite que ça marche : $\frac{1}{N}\binom{N}{N-1} x_0 = \binom{N}{N} x_0$).

2. On vient de prouver que E_1 est engendré par le vecteur dont les coordonnées sont les $\binom{N}{k}$ pour $k \in [\![0, N]\!]$. Sa dimension est donc 1.

3. Par la formule du binôme de Newton, cette somme vaut $(1+1)^N$ c'est-à-dire 2^N.

4. — Existence :
   Le vecteur π dont les coordonnées sont les $\pi_k = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}$ pour $k \in [\![0, N]\!]$ convient : la somme de ses coordonnées vaut 1 d'après la question 3, et il est dans E_1 d'après la question 1, avec $x_0 = \frac{1}{2^N}$.

   — Unicité :
   Un tel vecteur π, étant dans E_1, doit être multiple du vecteur de coordonnées $\binom{N}{k}$, il existe donc un réel x_0 tel que $\forall k \in [\![0, N]\!] : \pi_k = \binom{N}{k} x_0$. La somme des coordonnées de π vaut alors $x_0 \times 2^N$ d'après la question 3), or elle doit valoir 1, donc $x_0 = \frac{1}{2^N}$.

5. On reconnaît la loi binômiale de paramètres N et $1/2$: en effet, $P(X_\infty = k) = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k} = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}$.
   Son espérance vaut $\frac{N}{2}$ et sa variance vaut $N\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{N}{4}$.

6. Puisque X_0 suit cette loi, le vecteur Y_0 est dans E_1, donc $A.Y_0 = Y_0$, i.e. $Y_1 = Y_0$; par une récurrence immédiate, on a donc $Y_n = Y_0$ pour tout entier n, et donc puisque la loi de X_n est donnée par les coordonnées de Y_n, X_n suit la même loi que X_0. Cela justifie le terme de « probabilité stationnaire » : la probabilité que l'urne U_1 soit dans un état donné ne dépend pas du nombre d'échanges qui ont été effectués. Par exemple, la probabilité que l'urne soit vide est $\frac{1}{2^N}$, à tout instant.