Agro A 2019 : corrigé

Durée : 2h30
Calculatrices interdites

Exercice

1. La variable aléatoire T suit la loi géométrique de paramètre $p = 1/2$. D'après le cours, son espérance vaut $1/p = 2$ et sa variance vaut $(1-p)/p^2 = 2$.
2. L'événement $(T > n)$ est l'événement « les n premiers lancers donnent un pile » ; comme les lancers sont indépendants, on a $P(T > n) = (1/2)^n$.
3. On a :

$$\begin{aligned}
P(T > n+m | T > n) &= \frac{P((T > n+m) \cap (T > n))}{P(T > n)} \\
&= \frac{P(T > n+m)}{P(T > n)} \quad \text{car } (T > n+m) \subset (T > n) \\
&= \frac{(1/2)^{n+m}}{(1/2)^n} \\
&= (1/2)^m
\end{aligned}$$

donc $P(T > n+m | T > n) = P(T > m)$. On peut interpréter ceci en disant que la loi géométrique est une loi sans mémoire : le fait de savoir qu'il y a eu n échecs ne change pas la probabilité que les m tentatives suivantes soient des échecs.
Cette propriété s'appelle aussi « invariance temporelle de la loi géométrique », elle figure au programme.

4. On a :
   - $p_1 = 0$ puisque $S \geq 2$.
   - $p_2 = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) \times P(F_2)$ puisque les lancers sont indépendants ; donc $p_2 = 1/4$.
   - $p_3 = P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = (1/2)^3 = 1/8$ pour la même raison.
   - Il n'y a que deux possibilités puisque les deux derniers lancers doivent être des face, et donc le précédent doit être un pile sinon le double face se produirait au troisième lancer :

$$\begin{aligned}
p4 &= P((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)) \\
&= P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \quad \text{car ces événements sont incompatibles} \\
&= (1/2)^4 + (1/2)^4 \\
&= 1/8
\end{aligned}$$

   On calcule les sommes $\sum_{k=1}^{n} p_k$ successivement pour n variant de 1 à 4, on trouve successivement : $0, 1/4, 3/8, 1/2$, d'où :

$$q_1 = 1; \quad q_2 = 3/2; \quad q_3 = 5/8; \quad q_4 = 1/2.$$

5. L'événement $(S > n)$ est l'événement contraire de la réunion des événements $(S = k)$ pour k entre 1 et n, et comme ces n événements sont disjoints, la probabilité de leur réunion est la somme de leurs probabilités, d'où

$$P(S > n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(S = k) = q_n.$$

6. Puisque q_n est une probabilité d'après la question précédente, on a bien $q_n \in [0, 1]$.
De plus, si S est strictement supérieur à $n+1$, alors il est strictement supérieur à n, donc l'événement $(S > n+1)$ est inclus dans l'événement $(S > n)$, et donc $P(S > n+1) \leq P(S > n)$, i.e. $q_{n+1} \leq q_n$. La suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
C'est une suite décroissante et minorée, donc par théorème, elle converge.
7. Soit R_n l'ensemble des suites de n lancers qui ne donnent pas de double face, c'est-à-dire l'ensemble des suites de n lancers qui vérifient $S > n$. L'événement $(S = n+3)$ est l'ensemble des suites de $n+3$ lancers obtenues en prenant une suite dans R_n et en la poursuivant par les résultats pile, face, face. En effet :
   - une telle suite vérifie bien $(S = n+3)$: le pile imposé pour le $(n+1)$-ième lancer permet de choisir n'importe quelle suite dans R_n car cette suite ne pourra alors pas produire $S = n+1$;

— si une suite vérifie $(S = n+3)$, alors elle est de ce type puisque ses n premiers lancers sont dans R_n (sinon on aurait $S \leq n$), ses deux derniers termes sont des face, et son $(n+1)$-ième terme est un pile sinon on aurait $(S \leq n+2)$.

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} P(S=n+3) & = & P(\ll \text{ les } n \text{ premiers lancers forment une suite dans } R \gg \cap \overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3}) \\ & = & P(\ll \text{ les } n \text{ premiers lancers forment une suite dans } R \gg) \times P(\overline{F_{n+1}} \cap F_{n+2} \cap F_{n+3}) \\ & & \text{car les n premiers lancers et les 3 derniers sont indépendants} \\ & = & P(S>n) \times (1/2)^3 \\ & = & q_n/8 \end{array}$$

On calcule alors :

$$\begin{array}{rcl} q_{n+3} - q_{n+2} & = & \left(1 - \sum_{k=1}^{n+3} p_k\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^{n+2} p_k\right) \\ & = & -p_{n+3} \quad \text{(téléscopage)} \\ & = & -q_n/8 \end{array}$$

d'où $q_{n+3} = q_{n+2} - q_n/8$.

8. Soit ℓ la limite de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui existe d'après la question 6. On a aussi $q_{n+2} \longrightarrow \ell$ et $q_{n+3} \longrightarrow \ell$, d'où d'après la relation ci-dessus et les propriétés générales des limites : $\ell = \ell - \ell/8$, ce qui implique que $\ell = 0$.
Interprétation :
Notons D l'événement ≪ on n'obtient jamais de double face ≫. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement D est contenu dans l'événement ≪ les n premiers lancers ne donnent pas de double face ≫ ; on en déduit que $P(D) \leq q_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $P(D) \leq 0$. Or $P(D)$ est une probabilité, donc $P(D) \geq 0$. De ces deux inégalités, on conclut que $P(D) = 0$: l'événement D est quasi-impossible.

9. On raisonne cette fois-ci sur les premiers lancers, en utilisant les ensembles R_n et R_{n+1} : l'événement $(S > n+2)$ est la réunion des deux événements suivants :
   — l'ensemble des séquences pour lesquelles le premier terme est pile et les $n+1$ suivants sont un élément de R_{n+1} ;
   — l'ensemble des séquences pour lesquelles le premier terme est face, le deuxième pile, et les n suivants sont un élément de R_n.

   Justification :
   — $(S > n+2)$ contient cette réunion : en effet, pour le premier ensemble, le pile initial empêche d'avoir $S = 2$, et ensuite les lancers 2 à $n+2$ ne peuvent pas présenter de double face puisqu'il s'agit d'une suite de lancers dans R_{n+1} ; et pour le deuxième ensemble, on n'a pas $S = 2$ (face puis pile) ni $S = 3$ (pile au deuxième lancer), et ensuite on ne peut plus avoir de double face puisqu'on est dans R_n.
   — Toute suite de lancers vérifiant $S > n+2$ est formée ainsi, puisque le premier lancer donne soit pile, soit face, et dans ce deuxième cas, le deuxième lancer est obligatoirement un pile.

   Cette réunion est disjointe, sa probabilité est donc la somme des probabilités ; le premier événement est l'intersection des événements indépendants $\overline{F_1}$ et ≪ les lancers 2 à $n+2$ ne présentent pas de double face ≫, et le deuxième événement est l'intersection des événements indépendants $F_1 \cap \overline{F_2}$ et ≪ les lancers 3 à $n+2$ ne présentent pas de double face ≫ ; de plus, ≪ les lancers 2 à $n+2$ ne présentent pas de double face ≫a la même probabilité que $(S > n+1)$ (le moment où on commence à compter les lancers n'intervient pas, et il y a $n+1$ lancers), et de même ≪ les lancers 3 à $n+2$ ne présentent pas de double face ≫a la même probabilité que $S > n$. On en déduit :

$$P(S>n+2) = P(\overline{F_1}) \times P(S>n+1) + P(F_1 \cap \overline{F_2}) \times P(S>n)$$

   d'où :

$$q_{n+2} = \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4}.$$

   Remarque : on pouvait aussi montrer cette formule par récurrence à partir de la formule de la question 7.

10. Le discriminant vaut $\Delta = (1/2)^2 + 4/4 = 5/4$, d'où les racines :

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}; \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

11. C'est un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues, dont le déterminant vaut $r_1 r_2^2 - r_1^2 r_2 = r_1 r_2 (r_2 - r_1)$ qui est non nul puisque r_1 et r_2 sont non nuls et distincts. Il admet donc une unique solution, d'après le cours.
12. On le prouve par récurrence double sur n :
    — Initialisation : faite à la question 11.
    — Hérédité : on suppose la propriété vraie pour q_n et q_{n+1}, et on montre qu'elle l'est alors aussi pour q_{n+2} :

$$\begin{aligned} q_{n+2} &= \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4} \\ &= \frac{Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}}{2} + \frac{Ar_1^n + Br_2^n}{4} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= Ar_1^n \left(\frac{r_1}{2} + \frac{1}{4} \right) + Br_2^n \left(\frac{r_2}{2} + \frac{1}{4} \right) \\ &= Ar_1^n \times r_1^2 + Br_2^n \times r_2^2 \quad \text{car } r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont racines de } X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} \\ &= Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2} \end{aligned}$$

    — Conclusion : par le principe de récurrece, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.
13. On a $|r_1| = (\sqrt{5} - 1)/4 < |r_2|$; on va donc montrer que $q_n \sim Br_2^n$:

$$\frac{q_n}{Br_2^n} = \frac{Ar_1^n + Br_2^n}{Br_2^n} = \frac{A}{B} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n + 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

car $\left| \frac{r_1}{r_2} \right| < 1$ donc le premier terme tend vers 0.
On a donc :

$$q_n \sim Br_2^n.$$

On a bien $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $0 < r_2 < 1$.

Problème

I. Contexte

1. Notons $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On va montrer par récurrence sur n que $U_n = A^n U_0$ pour tout entier n.
    — Initialisation : il s'agit de vérifier que $U_0 = A^0 U_0$, ce qui est vrai puisque $A^0 = I_3$.
    — Hérédité : supposons que pour un certain entier n, $U_n = A^n U_0$. On constate, en faisant le produit matriciel, que $AU_n = \begin{pmatrix} au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$; de l'hypothèse de récurrence, on déduit alors que $U_{n+1} = AU_n = A.A^n U_0 = A^{n+1} U_0$.
    — Conclusion : pour tout entier n, $U_n = A^n U_0$.

II. Premier exemple

2. On cherche les valeurs propres de A : un réel λ est valeur propre de A si et seulement si il existe une matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non nulle telle que $AX = \lambda X$. On résout :

$$\begin{aligned} AX = \lambda X \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y - 2z &=& \lambda x \\ x &=& \lambda y \\ y &=& \lambda z \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 2\lambda^2 z + \lambda z - 2z &=& \lambda^3 z \\ x &=& \lambda^2 z \\ y &=& \lambda z \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{lcl} (\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2)z &=& 0 \\ x &=& \lambda^2 z \\ y &=& \lambda z \end{array} \right. \end{aligned}$$

Si $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \neq 0$, la seule solution est $X = 0$; si $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, alors les X vérifiant $AX = \lambda X$ sont les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} \lambda^2 z \\ \lambda z \\ z \end{pmatrix}$ pour $z \in \mathbb{R}$ quelconque, c'est-à-dire les multiples de $\begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$.
On cherche donc les racines du polynôme $X^3 - 2X^2 - X + 2$:

$$\begin{aligned} X^3 - 2X^2 - X + 2 &= (X-1)(X^2 - X - 2) \\ &= (X-1)(X+1)(X-2) \end{aligned}$$

Les racines sont 1, -1, 2. On a ainsi déterminé le spectre de A : $Sp(A) = \{1; -1; 2\}$.
La matrice A est d'ordre 3 et elle possède 3 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

3. Il existe donc une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Notons D cette matrice diagonale. On a $A = PDP^{-1}$, d'où par une récurrence immédiate, $A^n = PD^nP^{-1}$, soit :

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En posant $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a : $D^n = D_1 + D_2^n + D_3^n$, d'où :

$$\begin{aligned} A^n &= PD_1P^{-1} + PD_2^nP^{-1} + PD_3^nP^{-1} \\ &= PD_1P^{-1} + (-1)^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + 2^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

qui est bien de la forme $R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$ avec $R_1 = PD_1P^{-1}$, $R_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ et $R_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

4. Avec les notations de la question 1, on a $U_n = A^n U_0 = (R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3)U_0$. On obtient u_n en lisant la troisième coordonnée de cette matrice-colonne : c'est

$u_n = ((R_1)_{3,1} + (-1)^n (R_2)_{3,1} + 2^n (R_3)_{3,1})u_0 + ((R_1)_{3,2} + (-1)^n (R_2)_{3,2} + 2^n (R_3)_{3,2})u_1 + ((R_1)_{3,3} + (-1)^n (R_2)_{3,3} + 2^n (R_3)_{3,3})u_2$

qui est bien combinaison linéaire de $2^n, 1$ et $(-1)^n$.

III. Second exemple

5. On utilise la même méthode et les mêmes notations qu'en 2), et on aboutit cette fois-ci au système suivant :

$$AX = \lambda X \iff \left\{ \begin{array}{lcl} (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2)z &=& 0 \\ x &=& \lambda^2 z \\ y &=& \lambda z \end{array} \right. .$$

Le spectre de A est donc formé des racines du polynôme $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$. On le factorise en remarquant que de nouveau, 1 est racine :

$$\begin{aligned} X^3 - 4X^2 + 5X - 2 &= (X-1)(X^2 - 3X + 2) \\ &= (X-1)(X-1)(X-2) \end{aligned}$$

Donc $Sp(A) = \{1; 2\}$: on ne peut pas conclure tout de suite sur la diagonalisabilité.
Mais en résolvant l'équation $AX = \lambda X$, on a aussi déterminé les espaces propres : pour $\lambda \in \{1; 2\}$, on a :

$$E_\lambda = Vect(\begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Les deux espaces propres E_1 et E_2 sont de dimension 1, or on sait que A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses espaces propres vaut 3, ce qui n'est pas le cas ici, donc A n'est pas diagonalisable.

6. Comme l'énoncé, je confondrai vecteur et matrice-colonne.
Soit X un vecteur de $D = Vect(U)$: $X = aU$, où a est un réel. On veut montrer que $AX \in D$: or on remarque que U est dans E_2 (d'après la question 5), donc $AX = aAU = 2aU \in D$.

7. a. Soit P l'espace engendré par V et AV. D'après la définition de *plan*, il s'agit de montrer que P est de dimension 2, c'est-à-dire que la famille de deux vecteurs (V, AV) est libre (puisqu'elle est par définition déjà génératrice de P). On fait le produit matriciel, et on trouve :

$$AV = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs V et AV sont visiblement non colinéaires, donc la famille (V, AV) est libre.

b. On calcule A^2V en faisant le produit matriciel :

$$A^2V = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On voit facilement que A^2V est combinaison linéaire de V et AV : $A^2V = -2V + 3AV$, donc $A^2V \in P$.

c. Soit $X \in P$: puisque P est engendré par V et AV, on peut trouver deux réels x_1 et x_2 tels que $X = x_1V + x_2AV$. On a alors $AX = x_1AV + x_2A^2V = (x_1 + x_2)AV$, donc $X \in P$. Ceci est vrai pour tout $X \in P$, donc P est stable par A.

Résultats sur les droites et plans stables par une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

8. On prouve les deux implications :
   - Supposons D stable par A, alors, puisque U appartient à D, on a $AU \in D$; et puisque $D = Vect(U)$, le vecteur AU est multiple de U. Comme de plus U est non nul, c'est un vecteur propre de A.
   - Supposons U vecteur propre de A, pour une certaine valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $X \in D$: il existe un réel a tel que $X = aU$; on a donc $AX = aAU = a\lambda U \in D$. Ceci est vrai $\forall X \in D$, donc D est stable par A.

9. a. On prouve les deux implications :
   - Supposons P stable par A, alors puisque X_1 et X_2 sont dans P, AX_1 et AX_2 aussi.
   - Supposons que AX_1 et AX_2 appartiennent à P. Soit X un vecteur de P : comme $P = Vect(X_1, X_2)$, il existe deux réels a_1 et a_2 tels que $X = a_1X_1 + a_2X_2$; on a donc $AX = a_1AX_1 + a_2AX_2$; or AX_1 et AX_2 appartiennent à P et P est un espace vectoriel, donc stable par combinaison linéaire, donc $AX \in P$. Ceci est vrai $\forall X \in P$, donc P est stable par A.

b. On raisonne par équivalence sur le fait que X_1 et ${}^tAX_3$ sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} ({}^tAX_3|X_1) = 0 &\iff {}^t({}^tAX_3)X_1 = 0 \\ &\iff {}^tX_3AX_1 = 0 \\ &\iff (X_3|AX_1) = 0 \end{aligned}$$

donc X_1 et ${}^tAX_3$ sont orthogonaux si et seulement si X_3 et AX_1 sont orthogonaux ; or P est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à X_3 (géométrie élémentaire dans $\mathbb{R}^3$, ça ne serait pas vrai en dimension supérieure). Donc $AX_1 \in P \iff$ les vecteurs X_1 et ${}^tAX_3$ sont orthogonaux.

c.
   - On déduit de a) et de b) que P est stable par A si et seulement si X_1 et X_2 sont orthogonaux à ${}^tAX_3$.
   - Or un vecteur U est normal au plan P si et seulement si il est orthogonal à X_1 et à X_2 ; en effet :
     - si U est orthogonal à tous les vecteurs de P, en particulier il est orthogonal à X_1 et à X_2 ;
     - si U est orthogonal à X_1 et à X_2 : soit $X = x_1X_1 + x_2X_2$ un vecteur quelconque de P, alors $(X|U) = (x_1X_1 + x_2X_2|U) = x_1(X_1|U) + x_2(X_2|U) = x_1 \times 0 + x_2 \times 0 = 0$; ceci est vrai pour tout $X \in P$, donc U est normal à P.
   - De plus, un vecteur est normal au plan P si et seulement si il est multiple de X_3, qui engendre la droite normale à P. (Remarque : ceci ne figure pas explicitement au programme de BCPST1).

On déduit de ces deux derniers points que le vecteur ${}^tAX_3$ est orthogonal à X_1 et à X_2 si et seulement si il est multiple de X_3, i.e. si et seulement si il existe un réel λ tel que ${}^tAX_3 = \lambda X_3$, i.e. si et seulement si c'est un vecteur propre de ${}^tA$ (puisque X_3 est supposé non nul) ; et donc, avec le premier point, que :
P est stable par A si et seulement si X_3 est un vecteur propre de ${}^tA$.

V. Fin du second exemple

10. D'après la question 8, les droites stables par A sont les droites engendrées par les vecteurs propres de A. Comme cette matrice admet deux espaces propres de dimension 1, tous les vecteurs propres associés à une même valeur propre sont colinéaires et engendrent donc la même droite. La matrice A a donc exactement deux droites stables, qui sont E_1 et E_2 :
$$E_1 = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}); \quad E_2 = Vect(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

11. Soit P un plan vectoriel stable par A, et soit $X_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P. D'après la question 9.c), X_3 est un vecteur propre de la matrice ${}^tA$. On nous donne les valeurs propres de ${}^tA$, on va donc directement chercher les vecteurs propres.
    — Pour la valeur propre 1 :
$$\begin{aligned} {}^tAX_3 = X_3 \quad & \iff \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 4x+y & = & x \\ -5x+z & = & y \\ 2x & = & z \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0=0 & & \\ y & = & -3x \\ z & = & 2x \end{array} \right. \\ & \quad \text{(en substituant, de bas en haut, z puis y)} \end{aligned}$$
    donc $E_1({}^tA) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix})$.
    — Pour la valeur propre 2 :
$$\begin{aligned} {}^tAX_3 = 2X_3 \quad & \iff \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 4x+y & = & 2x \\ -5x+z & = & 2y \\ 2x & = & 2z \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0=0 & & \\ y & = & -2x \\ z & = & x \end{array} \right. \\ & \quad \text{(en substituant z puis y)} \end{aligned}$$
    donc $E_2({}^tA) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

    Les plans stables sont donc les deux plans suivants :
    — le plan d'équation x-3y+2z=0 ;
    — le plan d'équation x-2y+z=0.

    (les autres vecteurs propres, étant multiples de ceux choisis ci-dessus, donnent des équations multiples de celles-ci et donc ils définissent les mêmes plans).

12. On prend $e_1 = U = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est bien un vecteur propre associé à la valeur propre 2 pour A ; on doit alors choisir e_2 parmi les vecteurs propres de A (pour que la droite qu'il engendre soit stable par A) associés à la valeur

propre 1, sinon il serait colinéaire à e_1, or on veut une base. On prend $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On constate que e_2 appartient aux deux plans stables de A puisque ses coordonnées vérifient les deux équations. Il reste à choisir e_3 dans l'un de ces deux plans stables, et de façon à ce que la famille (e_1, e_2, e_3) soit libre.
À tout hasard, on regarde si U est dans l'un des deux plans stables, et en effet : $1 \times 4 - 3 \times 2 + 2 \times 1 = 0$, donc U est dans le premier plan stable trouvé à la question 11, on va donc choisir e_3 dans l'autre plan stable et indépendant de e_2 : par exemple $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Il reste à vérifier que la famillle de trois vecteurs ainsi obtenue est libre ; or e_2 et e_3 sont dans un des plans stables de A alors que e_1 n'y est pas. On a donc une famille libre (e_2, e_3), et un vecteur e_1 n'appartenant pas à $Vect(e_2, e_3)$: la famille (e_1, e_2, e_3) est donc libre.
C'est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

13. a. Pour e_1 et e_2, comme on a choisi des vecteurs propres de A, on sait déjà que $f(e_1) = 2e_1$ et $f(e_2) = e_1$.
On calcule $f(e_3)$ en faisant le produit matriciel :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste à exprimer ce vecteur en fonction de e_1, e_2 et e_3 : on cherche (x, y, z) tel que $xe_1 + ye_2 + ze_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Or on a choisi e_3 pour que le plan engendré par e_2 et e_3 soit stable, donc $f(e_3)$ est en fait combinaison linéaire de e_2 et e_3 seulement ; avec cette remarque, on voit tout de suite que $f(e_3) = e_2 + e_3$.
On peut maintenant écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(On a mis en colonne les coordonnées des vecteurs $2e_1, e_2$ et $e_2 + e_3$ dans la base $\mathcal{B}$).

b. En prenant $\delta = 1$, la matrice B est la matrice de f dans $\mathcal{B}$ d'après la question précédente, et donc A est semblable à cette matrice B par définition.

c. On a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conjecture que :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on le montre facilement par récurrence.

14. Si une suite u vérifie cette relation de récurrence, alors d'après la partie $I.$, puisque la matrice de la partie $I.$ est alors celle du second exemple, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

En notant P la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique, on a $A = PBP^{-1}$, d'où par une récurrence immédiate, $A^n = PB^nP^{-1}$. Comme pour le premier exemple, on écrit :

$$B^n = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = 2^n R_1 + R_2 + nR_3$
avec $R_1 = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, $R_2 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $R_3 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.
En notant, pour $i \in \{1;2;3\}$, $V_i = R_i\begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = 2^n V_1 + V_2 + nV_3,$$

d'où en notant α, β et γ le troisième coefficient de V_1, V_2 et V_3, on obtient :

$$u_n = 2^n\alpha + \beta + n\gamma.$$