Concours Agro-Véto 2021
Correction de l'épreuve 'Méthodes de calcul et raisonnement'

Partie I : modèle d'évolution de Wright-Fisher

I. Etude d'un cas particulier.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Dans cette partie $N = 1$ donc $X_n(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ et ainsi la famille $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ forme un système complet d'événements.
On fixe j dans $[\![0, 2]\!]$.
En appliquant la formule des probabilités totales à l'événement $([X_{n+1} = j])$ avec le système complet $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$, on obtient :
$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{2} P(X_n = i) \times P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$
Ces relations obtenues pour $j = 0$, $j = 1$ et $j = 2$ s'écrivent matriciellement
$$\boxed{V_{n+1} = MV_n \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 0|X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 2|X_n = 0) & P(X_{n+1} = 2|X_n = 1) & P(X_{n+1} = 2|X_n = 2) \end{pmatrix}}$$
On peut expliciter M avec la formule donnée par l'énoncé :
$$\forall (i, j) \in [\![0, 2]\!]^2, \ \ P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \binom{2}{j} \left(\frac{i}{2}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2}\right)^{2-j}.$$
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}.$$
Remarque 1 : on fera attention, dans les calculs, au terme 0^0 qui vaut 1.
Remarque 2 : on étudie ici une 'chaîne de Markov', donc dans la matrice M, la somme des éléments sur une colonne doit être égale à 1. Ceci permet de vérifier que la matrice M qui a été obtenue est correcte.
2. On remarque qu'il y a deux vecteurs propres évidents, puisque :
$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Ensuite on note que :
$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On définit les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

La famille (u_1, u_2, u_3) est clairement libre et contient trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de M.

Ainsi $\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$

Plus précisément, on a

$$\boxed{M = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}.}$$

Remarque 1 : on peut évidemment obtenir la diagonalisation de M même si on ne voit pas, en lisant la matrice, les vecteurs propres. Pour cela on utilise la méthode classique en échelonnant la matrice $M - \lambda I_3$, pour obtenir que cette matrice n'est pas de rang 3 si, et seulement si, $\lambda \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. Ensuite on détermine par résolution de systèmes linéaires $E_1 = Ker(M - I_3)$ et $E_{\frac{1}{2}} = Ker(M - \dfrac{1}{2} I_3)$.

Remarque 2 : la matrice P n'est pas unique, d'autres réponses sont possibles. De même les coefficients diagonaux de D peuvent être écrits dans n'importe quel ordre.

3. Pour tout entier n on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition : ' $M^n = PD^nP^{-1}$. '

   - Initialisation :

   D'une part $M^0 = I_3$. D'autre part $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   - Hérédité :

   Fixons n dans $\mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$M^{n+1} = M^nM = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nI_3DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

   Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   - Conclusion : Le principe de récurrence permet de conclure que pour tout entier n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ M^n = PD^nP^{-1}.$$

   Passons maintenant au calcul de PD^n :

$$PD^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 0 & -2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{1}{2^n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2^n}\\0 & 0 & -\frac{1}{2^{n-1}}\\0 & 1 & \frac{1}{2^n}\end{pmatrix}.$$

   Le calcul de P^{-1} se fait par la méthode habituelle (miroir ou résolution de $PX = Y$) et ne pose aucune difficulté. On obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\0 & \frac{1}{2} & 1\\0 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

   et enfin :

$$\boxed{M^n = (PD^n)P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0\\0 & \frac{1}{2^n} & 0\\0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1\end{pmatrix}.}$$

   Remarque : on peut vérifier les calculs car dans la matrice M^n, comme c'était le cas dans M, la somme des éléments sur une colonne doit être égale à 1. C'est bien vérifié ici.

4. On montre par une récurrence simple que pour tout entier n, $V_n = M^n V_0$. Ainsi

$$P(X_n = 0) = P(X_0 = 0) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}})P(X_0 = 1)$$

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2^n} P(X_0 = 1)$$

$$P(X_n = 2) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}})P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2).$$

— (a) On peut alors calculer $E(X_n)$:

$$\boxed{E(X_n) = P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2) = P(X_0 = 1) + 2P(X_0 = 2) = E(X_0).}$$

— (b) Puisque $|\frac{1}{2}| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = P(X_0 = 0) + \frac{1}{2}P(X_0 = 1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{2}P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2).$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X_n \in \{0, 2\}) = P(X_0 = 0) + P(X_0 = 1) + P(X_0 = 2) = 1.}$$

II. Cas général.

5. — (a) Soit i dans $[\![0, 2N]\!]$.
La somme S_i est l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(2N, \frac{i}{2N})$. Donc

$$\boxed{S_i = 2N \times \frac{i}{2N} = i.}$$

— (b) Soit n dans $\mathbb{N}$. On va calculer $E(X_{n+1})$ en faisant apparaître les termes S_i, grâce à la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \sum_{j=0}^{2N} jP(X_{n+1} = j) \\
&= \sum_{j=0}^{2N} \Big(j \sum_{i=0}^{2N} P(X_n = i)P(X_{n+1} = j | X_n = i)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{2N} \Big(P(X_n = i) \sum_{j=0}^{2N} jP(X_{n+1} = j | X_n = i)\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{2N} P(X_n = i)S_i \\
&= \sum_{i=0}^{2N} iP(X_n = i).
\end{aligned}$$

L'interversion des deux sommes est possible car ce sont des sommes finies. En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \;\; E(X_{n+1}) = E(X_n).}$$

— (c) $\boxed{\text{La suite } (E(X_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc constante égale à } E(X_0).}$

6. — (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, 2N-1]\!]$.

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = k) &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = k) + P(X_{n+1} = 2N | X_n = k) \\ &= \Big(\frac{2N-k}{2N}\Big)^{2N} + \Big(\frac{k}{2N}\Big)^{2N}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, $k \geq 1$ donc : $\Big(\frac{k}{2N}\Big)^{2N} \geq \Big(\frac{1}{2N}\Big)^{2N}$.
Ensuite, $k \leq 2N-1$ donc $2N-k \geq 1$ puis : $\Big(\frac{2N-k}{2N}\Big)^{2N} \geq \Big(\frac{1}{2N}\Big)^{2N}$.
En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1, 2N-1]\!], \ \ P(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = k) \geq 2\Big(\frac{1}{2N}\Big)^{2N}.}$$

— (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule des probabilités totales, puis la question (a) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{2N} P(X_n = k) \times P(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = k) \\ &\geq P(X_n = 0) \times P(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = 0) \\ &\quad + P(X_n = 2N) \times P(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = 2N) + 2\Big(\frac{1}{2N}\Big)^{2N} \sum_{k=1}^{2N-1} P(X_n = k). \end{aligned}$$

D'après l'énoncé en début de partie I,

$$P(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = 0) = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) + P(X_{n+1} = 2N | X_n = 0) = 1 + 0 = 1.$$

$$P(X_{n+1} \in \{0, 2N\} | X_n = 2N) = 0 + 1 = 1.$$

On a donc :

$$u_{n+1} \geq P(X_n = 0) + P(X_n = 2N) + 2\Big(\frac{1}{2N}\Big)^{2N}\Big(1 - P(X_n = 0) - P(X_n = 2N)\Big).$$

Enfin, puisque $P(X_n = 0) + P(X_n = 2N) = u_n$, on obtient :

$$\boxed{u_{n+1} \geq u_n + 2(1 - u_n)\Big(\frac{1}{2N}\Big)^{2N}.}$$

— (c) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Remarquons que pour tout entier n, $w_{n+1} = (1-\alpha)w_n + \alpha$.

Montrons par récurrence que pour tout entier n, $w_n \in [0, 1]$.
. Lorsque $n = 0$, $w_0 = u_0 \in [0, 1]$ car u_0 est une probabilité.
. Supposons, pour n entier fixé, que $w_n \in [0, 1]$.
Puisque $\alpha > 0$, on a alors : $0 \leq (1-\alpha)w_n \leq 1 - \alpha$. Puis $\alpha \leq w_{n+1} \leq 1$, donc $w_{n+1} \in [0, 1]$.
. Le principe de récurrence permet de conclure que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \in [0, 1]$.

On en déduit que pour tout entier n, $w_{n+1} - w_n = \alpha(1 - w_n) \geq 0$. Ainsi la suite (w_n) est croissante, de plus cette suite est majorée par 1, donc (w_n) converge.

Notons $L = \lim w_n$ et passons à la limite dans l'égalité : $w_{n+1} = w_n + \alpha(1 - w_n)$.
On obtient $L = L + \alpha(1 - L)$, ce qui équivaut à $\alpha(1 - L) = 0$. Or $\alpha \neq 0$, donc $L = 1$.
En conclusion : $\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ converge vers } 1.}$

Remarque : on pouvait aussi utiliser la formule sur les suites arithmético-géométriques pour expliciter w_n puis obtenir la limite.

— (d) Posons $\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2N}\right)^{2N}$. Puisque $N \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in]0,1[$. Donc le résultat de (c) est applicable.
Reprenons la suite (w_n) définie en (c).
On va montrer par récurrence que pour tout entier n, $u_n \geq w_n$.
. Déjà $w_0 = u_0$ donc $u_0 \geq w_0$.
. On fixe un entier n et on suppose $u_n \geq w_n$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & \geq & u_n + \alpha(1-u_n) \quad \text{(d'après (b))} \\ & \geq & \alpha + (1-\alpha)u_n \\ & \geq & \alpha + (1-\alpha)w_n \quad \text{(par hypothèse de récurrence et car } \alpha > 0) \\ & \geq & w_{n+1}. \end{array}$$

. Le principe de récurrence permet de conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n \geq w_n.$$

De plus (u_n) est majorée par 1 car chaque terme u_n est une probabilité, et la suite (w_n) converge vers 1. Le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } 1.}$$

Interprétation : il est quasi-certain qu'à un moment donné X_n soit égal à 0 ou à $2N$.
On vient de mettre en évidence un phénomène de dérive génétique.

Partie II : Equilibre de Hardy-Weinberg

7. On reconnaît un schéma binomial. En effet il y a N individus qui ont chacun la probabilité p_1 d'être de type 1, ceci indépendamment les uns des autres. Donc

$$\boxed{N_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p_1).}$$

Remarque : pour les mêmes raisons, $N_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p_2)$ et $N_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p_3)$.

8. D'après le cours sur la loi binomiale :

$$\boxed{E(N_1) = Np_1 \text{ et } V(N_1) = Np_1(1-p_1).}$$

9. La variable aléatoire $N_1^* = \dfrac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1-p_1)}}$ est la variable centrée réduite associée à la variable binomiale N_1. D'après le théorème central limite,

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} P\Big(a \leq N_1^* \leq b\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.}$$

10. — (a) Par symétrie de la covariance, $Cov(N_1, N_2) = Cov(N_2, N_1)$. Donc W est une matrice symétrique, à coefficients réels. D'après le cours, on peut en conclure que

$$\boxed{W \text{ est diagonalisable.}}$$

— (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aV(N_1) + bCov(N_1, N_2) \\ aCov(N_1, N_2) + bV(N_2) \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2V(N_1) + abCov(N_1, N_2) + abCov(N_1, N_2) + b^2V(N_2) = V(aN_1 + bN_2).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \ V(aN_1 + bN_2) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.}$$

— (c) Soit λ une valeur propre de W. Il existe un vecteur non nul $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tel que

$$W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda(a^2 + b^2).$$

En utilisant la relation de (b) on obtient : $\lambda(a^2 + b^2) = V(aN_1 + bN_2)$.
Or $a^2 + b^2 > 0$ et une variance est toujours positive ou nulle, donc $\lambda \geq 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } W \text{ sont positives ou nulles.}}$$

— (d) Reprenons les notations de la question précédente et raisonnons par l'absurde en supposant $\lambda = 0$.
On a alors : $V(aN_1 + bN_2) = 0$. Ceci entraîne que la variable aléatoire $aN_1 + bN_2$ est constante. Or lorsque $N_1 = 0$ et $N_2 = 0$ alors $aN_1 + bN_2 = 0$, lorsque $N_1 = 1$ et $N_2 = 0$ alors $aN_1 + bN_2 = a$, et lorsque $N_1 = 0$ et $N_2 = 1$ alors $aN_1 + bN_2 = b$, or $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, donc $aN_1 + bN_2$ n'est pas constante.
On constate une contradiction, donc on peut conclure que $\lambda \neq 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } W \text{ sont strictement positives.}}$$

— (e) On déduit des questions (a) et (d) qu'il existe une matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$, avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$, une matrice inversible P, telles que :

$$W = P\Delta P^{-1}.$$

De plus W est symétrique réelle donc il existe une base de vecteurs propres qui est orthonormale, donc la matrice P peut être choisie de sorte que $P^{-1} = {}^tP$.
Posons maintenant $D = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ avec $\gamma_1 = \sqrt{\alpha_1} > 0$ et $\gamma_2 = \sqrt{\alpha_2} > 0$, de sorte que $D^2 = \Delta$. On a bien :

$$\boxed{D \text{ est diagonale et inversible} \quad ; \quad P \text{ est inversible d'inverse } {}^tP \quad ; \quad W = PD^2P^{-1}.}$$

11. Remarquons que ${}^tA = {}^tP^{-1}\ {}^tD^{-1} = PD^{-1}$. Calculons :

$$AW\ {}^tA = D^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}PD^{-1} = D^{-1}D^2D^{-1} = I_2.$$

On en déduit que :

$$\boxed{V(Y_1) = V(Y_2) = 1 \quad \text{et} \quad Cov(Y_1, Y_2) = 0.}$$

12. — (a) On sait que $N_1 + N_2 = N - N_3$, donc

$$\boxed{V(N_1 + N_2) = V(N_3) = Np_3(1 - p_3).}$$

— (b) On en déduit que :

$$\begin{aligned}
Cov(N_1, N_2) &= \frac{1}{2}\Big(V(N_1 + N_2) - V(N_1) - V(N_2)\Big) \\
&= \frac{N}{2}\Big(p_3(1 - p_3) - p_1(1 - p_1) - p_2(1 - p_2)\Big) \\
&= \frac{N}{2}\Big((1 - p_1 - p_2)(p_1 + p_2) - p_1(1 - p_1) - p_2(1 - p_2)\Big) \\
&= \frac{N}{2}\Big(p_2 - p_1p_2 - p_1p_2 - p_2\Big) \\
&= -Np_1p_2.
\end{aligned}$$

Pour conclure :

$$\boxed{Cov(N_1, N_2) = -Np_1p_2.}$$

— (c) On peut remarquer que $W^{-1} = P(D^{-1})^2P^{-1}$, mais il est clair que l'énoncé attend ici un calcul complet.
Avec les formules sur l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2, appliquables ici puisqu'on a prouvé que W est inversible :

$$W^{-1} = \frac{1}{V(N_1)V(N_2) - Cov(N_1, N_2)^2}\begin{pmatrix} V(N_2) & -Cov(N_1, N_2) \\ -Cov(N_1, N_2) & V(N_1) \end{pmatrix}$$

ce qui donne, avec les calculs effectués précédemment :

$$\begin{aligned}
W^{-1} &= \frac{1}{N^2p_1(1 - p_1)p_2(1 - p_2) - N^2p_1^2p_2^2}\begin{pmatrix} Np_2(1 - p_2) & Np_1p_2 \\ Np_1p_2 & Np_1(1 - p_1) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{Np_1p_2(1 - p_1 - p_2)}\begin{pmatrix} p_2(1 - p_2) & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_1(1 - p_1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } W^{-1} = \frac{1}{Np_1p_2p_3}\begin{pmatrix} p_2(1-p_2) & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_1(1-p_1)\end{pmatrix}.}$$

Pour faciliter l'obtention du résultat de la question suivante, on peut transformer ceci en remarquant que $1-p_2 = p_1+p_3$ et $1-p_1 = p_2+p_3$:

$$\boxed{W^{-1} = \frac{1}{Np_1p_2p_3}\begin{pmatrix} p_2(p_1+p_3) & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_1(p_2+p_3)\end{pmatrix} = \frac{1}{Np_1p_2p_3}\left(p_1p_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + p_3\begin{pmatrix}p_2 & 0\\ 0 & p_1\end{pmatrix}\right).}$$

— (d) D'après (11), $W\ {}^t\!A = A^{-1}$ donc $W\ {}^t\!AA = I_2$. Ainsi

$$\boxed{{}^t\!AA = W^{-1}.}$$

$$\begin{aligned}
Y_1^2 + Y_2^2 &= \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix}\\
&= \Big(\begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2\end{pmatrix}\ {}^t\!A\Big)\left(A\begin{pmatrix}N_1 - Np_1\\ N_2 - Np_2\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2\end{pmatrix} W^{-1}\begin{pmatrix}N_1 - Np_1\\ N_2 - Np_2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{Np_1p_2p_3}\begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2\end{pmatrix}\left(p_1p_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + p_3\begin{pmatrix}p_2 & 0\\ 0 & p_1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}N_1 - Np_1\\ N_2 - Np_2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{Np_1p_2p_3}\Big(S_1 + S_2\Big)
\end{aligned}$$

en posant :

$$S_1 = p_1p_2\begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_1 - Np_1\\ N_2 - Np_2\end{pmatrix}$$

et

$$S_2 = p_3\begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2 & 0\\ 0 & p_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_1 - Np_1\\ N_2 - Np_2\end{pmatrix}.$$

Il semble plus raisonnable de les calculer séparément :

$$\begin{aligned}
S_1 &= p_1p_2\begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(N_1 - Np_1) + (N_2 - Np_2)\\ (N_1 - Np_1) + (N_2 - Np_2)\end{pmatrix}\\
&= p_1p_2\Big((N_1 - Np_1)^2 + 2(N_1 - Np_1)(N_2 - Np_2) + (N_2 - Np_2)^2\Big)\\
&= p_1p_2\Big(N_1 - Np_1 + N_2 - Np_2\Big)^2.
\end{aligned}$$

Or $N_1 + N_2 = N - N_3$ et $Np_1 + Np_2 = N - Np_3$, d'où :

$$S_1 = p_1p_2(N_3 - Np_3)^2.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
S_2 &= p_3\begin{pmatrix} N_1 - Np_1 & N_2 - Np_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2(N_1 - Np_1)\\ p_1(N_2 - Np_2)\end{pmatrix}\\
&= p_3\Big(p_2(N_1 - Np_1)^2 + p_1(N_2 - Np_2)^2\Big).
\end{aligned}$$

On peut terminer le calcul de $Y_1^2 + Y_2^2$:

$$Y_1^2 + Y_2^2 = \frac{1}{Np_1p_2p_3}\Big(p_1p_2(N_3 - Np_3)^2 + p_2p_3(N_1 - Np_1)^2 + p_1p_3(N_2 - Np_2)^2\Big)$$

et ainsi :

$$\boxed{Y_1^2 + Y_2^2 = \frac{(N_1 - Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(N_2 - Np_2)^2}{Np_2} + \frac{(N_3 - Np_3)^2}{Np_3}.}$$

Partie III : Etude de la loi limite

Dans cette partie Z suit la loi normale centrée réduite, on notera Φ sa fonction de répartition.

13. Posons $R = Z^2$. Soit $t \in R(\Omega) = [0, +\infty[$.

$$F_R(t) = P(Z^2 \leq t) = P(-\sqrt{t} \leq Z \leq \sqrt{t}) = \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}).$$

On sait que pour tout réel x, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, donc :

$$F_R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{t}) - 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Puisque Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, F_R est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
De plus $\lim\limits_{t \to 0^+} F_R(t) = 2\Phi(0) - 1 = 0 = F_R(0) = \lim\limits_{t \to 0^-} F_R(t)$, donc F_R est continue en 0, et ainsi F_R est continue sur $\mathbb{R}$.
Finalement R est une variable à densité, de densité :

$$\boxed{f_R(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}}\Phi'(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.}$$

14. D'après la formule de Koenig,

$$E(R) = E(Z^2) = V(Z) + \big(E(Z)\big)^2 = 1 + 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{E(R) = 1.}$$

Pour $E(R^2) = E(Z^4)$ on applique le théorème de transfert. Sous réserve de convergence absolue,

$$E(Z^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Soient A et B deux réels avec $A < 0 < B$. On calcule

$$I(A, B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^B t^4 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

avec une intégration par parties, en dérivant $u(t) = t^3$ et en primitivant $v'(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$, u et v étant des fonctions de classe C^1 sur $[A, B]$:

$$I(A, B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \big[-t^3 e^{-\frac{t^2}{2}} \big]_A^B + 3 \int_A^B t^2 \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

En utilisant les croissances comparées on constate que lorsque $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$, $I(A, B)$ a une limite finie qui vaut $3E(Z^2)$.
Donc Z^4 admet une espérance qui vaut : $E(Z^4) = 3$.
Ainsi, avec la formule de Koenig :

$$\boxed{V(R) = V(Z^2) = E(Z^4) - \big(E(Z^2)\big)^2 = 2.}$$

15. Soit $x > 0$. On considère l'intégrale

$$h(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x - t)}} dt$$

qui est impropre en 0 et en x. On effectue le changement de variable $t = xu$, ce qui est possible puisque la convergence de l'intégrale $h(x)$ est admise par l'énoncé.

On a $dt = xdu$.

Pour les bornes : lorsque $t \to 0$, $u \to 0$; lorsque $t \to x$, $u \to 1$. Ainsi :

$$h(x) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{xu(x-xu)}} du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du.$$

Puisque cette dernière quantité ne dépend plus de x,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ égale à } C = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du.}$$

16. — (a) Notons $R_1 = Z_1^2$, $R_2 = Z_2^2$ et $T = R_1 + R_2$. Soit $x \in T(\Omega) = [0, +\infty[$.
Les variables aléatoires R_1 et R_2 sont indépendantes, on peut donc appliquer la formule du produit de convolution rappelée dans l'énoncé (avec une petite coquille puisque un des deux f_{U_1} de l'intégrale doit être f_{U_2}, ce qui n'est pas grave ici puisque les deux variables ont la même loi) :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{R_1}(x-t) f_{R_2}(t) dt.$$

Les variables R_1 et R_2 ont la même densité f_R déterminée en (13). De plus ces densités sont nulles sur $]-\infty, 0]$, et $x \geq 0$, donc :

$$f_T(x) = \int_0^x f_R(x-t) f_R(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^x \frac{e^{-\frac{(x-t)}{2}} e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{t(x-t)}} dt = \frac{e^{-\frac{x}{2}} h(x)}{2\pi}.$$

Donc

$$\boxed{\forall x \geq 0, \;\; f_T(x) = \frac{C}{2\pi} e^{-\frac{x}{2}}.}$$

On a aussi : $\forall x < 0, f_T(x) = 0$.

— (b) Puisque f_T est une densité de probabilité, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_T(x)dx = 1$. Or

$$\int_0^{+\infty} f_T(x) dx = \frac{C}{2\pi} \lim_{A \to +\infty} \big[-2e^{-\frac{x}{2}} \big]_0^A = \frac{C}{\pi}.$$

On en conclut que :

$$\boxed{C = \pi.}$$

Ceci permet d'affirmer que :

$$\forall x \geq 0, \;\; f_T(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Donc

$$\boxed{T \text{ suit la loi exponentielle } \mathcal{E}(\tfrac{1}{2}) \text{ donc : } E(T) = 2 \text{ et } V(T) = 2^2 = 4.}$$