Calcul et raisonnement, Agro-Véto 2022 — corrigé

Exercice 1

1. Quand $n = 2$, l'urne est vidée en un seul tirage si $N_1 = 1$, ou bien en deux tirages si $N_1 = 2$. Ces deux possibilités sont équiprobables, donc

$$\boxed{\begin{cases} X_2(\Omega) = \{1, 2\} \\ \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

Donc $\mathbb{E}(X_2) = 1\mathbb{P}(X_2 = 1) + 2\mathbb{P}(X_2 = 2) = \boxed{\dfrac{3}{2}.}$

Et $\mathbb{E}(X_2^2) = 1\mathbb{P}(X_2 = 1) + 4\mathbb{P}(X_2 = 2) = \dfrac{5}{2}$ d'où $\mathbb{V}X_2 = \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = \boxed{\dfrac{1}{4}.}$

2.
- $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
- $[X_3 = 1] = [N_1 = 1]$ donc $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$.
- $[X_3 = 2] = ([N_1 = 3] \cap [N_2 = 1]) \cup ([N_1 = 2] \cap [N_2 = 1])$ et les deux événements unis sont incompatibles, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 2) &= \mathbb{P}([N_1 = 3] \cap [N_2 = 1]) + \mathbb{P}([N_1 = 2] \cap [N_2 = 1]) \\
&= \mathbb{P}(N_1 = 3)\mathbb{P}(N_2 = 1 \mid N_1 = 3) + \mathbb{P}(N_1 = 2)\mathbb{P}(N_2 = 1 \mid N_1 = 2) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

- $[X_3 = 3] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 3) &= \mathbb{P}(N_1 = 3)\mathbb{P}(N_2 = 2 \mid N_1 = 3)\mathbb{P}(N_3 = 1 \mid [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2]) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Bref :

$$\boxed{\begin{cases} X_3(\Omega) = \{1, 2, 3\} \\ \mathbb{P}(X_3 = 1) = \dfrac{1}{3} \quad ; \quad \mathbb{P}(X_3 = 2) = \dfrac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \dfrac{1}{6} \end{cases}}$$

Donc $\mathbb{E}(X_3) = 1 \cdot \dfrac{1}{3} + 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 3 \cdot \dfrac{1}{6} = \boxed{\dfrac{5}{6}.}$

3. $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1, n]\!].}$

4. $[X_n = 1] = [N_1 = 1]$ donc $\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}.}$

$[X_n = n] = [N_1 = n] \cap [N_2 = n - 1] \cap \cdots \cap [N_n = 1] = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} [N_i = n + 1 - i]$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = n) &= \mathbb{P}(N_1 = n)\mathbb{P}(N_2 = n - 1 \mid N_1 = n) \ldots \mathbb{P}(N_n = 1 \mid [N_1 = n] \cap \ldots [N_{n-1} = 2]) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{2} \cdot 1 \\
&= \boxed{\frac{1}{n!}.}
\end{aligned}$$

5. Soit $k \geqslant 2$. Si l'urne contient au départ n boules, alors $([N_1 = i])_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_1 = i)\mathbb{P}(X_n = k \mid N_1 = i) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k \mid N_1 = i) \qquad (1)\end{aligned}$$

- Supposons $[N_1 = 1]$ réalisé : alors l'urne est immédiatement vidée, donc l'événement $[X_n = k]$ n'est pas réalisé. Par conséquent $\mathbb{P}(X_n = k \mid N_1 = 1) = 0$.
- Supposons $[N_1 = i]$ réalisé pour un entier $2 \leqslant i \leqslant n$. Après le premier tirage, il reste donc dans l'urne les boules numérotées de 1 $i - 1$. On est alors ramené à la situation de départ en partant d'une urne de $i - 1$ boules. Donc le nombre de tirages restants, à savoir $X_n - 1$, suit la même loi que X_{i-1}. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k \mid N_1 = i) &= \mathbb{P}(X_n - 1 = k - 1 \mid N_1 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)\end{aligned}$$

En remplaçant dans la formule (1) les probabilités conditionnelles par leurs valeurs, on obtient donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1).}$$

6. En multipliant la formule obtenue à la question 5 par k et en sommant pour $k = 2, \dots, n$ on obtient

$$\underbrace{\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k)}_{A} = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} k\mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)}_{B}.$$

- D'un côté A est égal à $\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{E}(X_n) - \dfrac{1}{n}$.
- De l'autre côté, par les changements d'indices $i = j - 1$ et $h = k - 1$ puis en échangeant les signes somme, B est égal à

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell + 1)\mathbb{P}(X_j = \ell).$$

  Or les variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ prennent leurs valeurs dans des sous-ensembles de $[\![1, n-1]\!]$, donc la somme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell + 1)\mathbb{P}(X_j = \ell)$ est égale à $\mathbb{E}(X_j + 1)$ par théorème de transfert. Donc

$$B = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j + 1) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j) + \frac{n-1}{n}.$$

- L'égalité entre A et B amène donc

$$\mathbb{E}(X_n) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j) + \frac{n-1}{n}$$

  donc en multipliant cette égalité par n puis en ajoutant 1 à chaque membre :

$$n\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j) + n. \qquad (2)$$

- On récrit cette équation au rang $n + 1$:

$$(n + 1)\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) + n + 1 \qquad (3)$$

Alors soustrayant les égalités $(3)-(2)$ on obtient :

$$(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n) + 1$$

ce qui donne bien $\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n+1}.}$

7. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n))$ est télescopique et égale à $\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1)$. Donc en utilisant le résultat de la question 6, il vient $\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}$. Comme $X_1 = 1$, on peut conclure $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.}$

8. (a) Soit $k \geqslant 2$. Sur $]0, +\infty[$, la fonction inverse est continue et décroissante.
   - La continuité donne l'existence des intégrales $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
   - La décroissance donne, par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \left(\sup_{t\in[k,k+1]} \frac{1}{t} \right) dt = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$$

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \geqslant \int_{k-1}^{k} \left(\inf_{t\in[k-1,k]} \frac{1}{t} \right) dt = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$$

   C.Q.F.D.

   (b) En sommant l'encadrement de la question 8.a pour k allant de 2 à n, on obtient :

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{dt}{t}$$

   ce qui donne :

$$1 - \ln 2 + \ln(n) + \ln(1 + \frac{2}{n}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n).$$

   En divisant cet encadrement par $\ln(n)$ (qui est strictement positif dès que $n \geqslant 2$) on obtient :

$$1 + \frac{1 - \ln(2) + \ln(1 + \frac{2}{n})}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

   Par opérations sur les limites, le majorant et le minorant de cet encadrement tendent vers 1 quand $n \to +\infty$, donc le théorème des gendarmes donne $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$

   (c) $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$ d'après les résultats des questions 7 et 8.b.

9. Suivant la même méthode qu'à la question 6, on multiplie par k^2 et on somme pour k de 2 à n l'égalité obtenue à la question 5. On obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} k^2\, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=2}^{n} k^2\, \mathbb{P}(X_{i-1} = k-1)$$

   ce qui donne par les mêmes opérations qu'à la question 5 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) - \frac{1}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell+1)^2\, \mathbb{P}(X_j = \ell) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}((X_j+1)^2) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j^2) + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j) + \frac{n-1}{n}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité $n\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j) + n$ (résultat intermédiaire (2) obtenu à la question 5) on en déduit

$$n\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_j^2) + 2n\mathbb{E}(X_n) - n. \tag{4}$$

Au rang $n+1$, cette égalité devient

$$\begin{aligned}(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}^2) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j^2) + 2(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n - 1 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j^2) + 2(n+1)\left(\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}\right) - n - 1 \qquad \text{d'après la question 6} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j^2) + 2(n+1)\mathbb{E}(X_n) - n + 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Alors la différence $(5) - (4)$ donne

$$(n+1)\mathbb{E}(X_{n+1}^2) - n\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1$$

et par conséquent $\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(X_n^2) + \frac{2}{n+1}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n+1}.}$

10. En calculant la somme télescopique $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathbb{E}(X_{k+1}^2) - \mathbb{E}(X_k^2)\right)$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_1^2) &= 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\mathbb{E}(X_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= 2\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\mathbb{E}(X_{j-1}) + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\end{aligned}$$

En utilisant $X_1 = 1$ et $\mathbb{E}(X_{j-1}) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i}$, on en déduit

$$\mathbb{E}(X_n^2) = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{ij} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Cependant, comme i et j jouent des rôles symétriques dans $\frac{1}{ij}$, on a

$$\begin{aligned}2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{ij} &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{ij} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \frac{1}{ij} \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{1}{ij} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}(X_n^2) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$, ce qui amène finalement $\boxed{\mathbb{V}(X_n) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.}$

Mais alors $\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\ln n} = -\frac{1}{\ln n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{\ln n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. Or d'une part la série $\sum_j \frac{1}{j^2}$ est convergente, et par conséquent $\frac{1}{\ln n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et d'autre part $\frac{1}{\ln n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'après la question 8.b.

Par somme de limites $\frac{\mathbb{V}(X_n)}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc $\boxed{\mathbb{V}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$

Exercice 2

I. Étude d'une équation différentielle homogène avec condition aux bords

1. $y'' + \lambda y = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions réelles. Son polynôme caractéristique est $X^2 + \lambda$.
   - Cas $\lambda < 0$: le polynôme caractéristique a deux racines réelles $\sqrt{-\lambda}$ et $-\sqrt{-\lambda}$, donc
   $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ae^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}} \middle| A, B \in \mathbb{R} \right\}.}$$
   - Cas $\lambda > 0$: le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées $i\sqrt{\lambda}$ et $-i\sqrt{\lambda}$, donc
   $$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto A\cos(x\sqrt{\lambda}) + B\sin(x\sqrt{\lambda}) \middle| A, B \in \mathbb{R} \right\}.}$$
   - Cas $\lambda = 0$: le polynôme caractéristique a 0 pour racine double, donc
   $$\boxed{\mathcal{S} = \{ x \mapsto Ax + B | A, B \in \mathbb{R} \}.}$$

2. Soit $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$ telles que $f(0) = f(1) = 0$. Soit f une solution de $y'' + \lambda y = 0$.
   - Si $\lambda < 0$ on sait qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ae^{x\sqrt{-\lambda}} + Be^{-x\sqrt{-\lambda}}$. Les conditions $f(0) = f(1) = 0$ sont équivalentes à
   $$M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}} & e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}$. Or $\det(M) = e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-\lambda}}$. Comme $\lambda > 0$, il s'ensuit $\sqrt{-\lambda} > 0 > -\sqrt{-\lambda}$ donc $e^{\sqrt{-\lambda}} > e^{-\sqrt{-\lambda}}$ et par conséquent $\det(M) \neq 0$. Donc M est inversible, et
   $$M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Conclusion : $\mathcal{S}_1 = \{0\}$.
   - Si $\lambda = 0$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ax + B$. Alors $f(0) = f(1) = 0$ équivaut $\begin{cases} B = 0 \\ A + B = 0 \end{cases}$, d'où $A = B = 0$. À nouveau $\mathcal{S}_1 = \{0\}$.
   - Si $\lambda > 0$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = A\cos(x\sqrt{\lambda}) + B\sin(x\sqrt{\lambda})$. Les conditions $f(0) = f(1) = 0$ donnent alors
   $$\begin{cases} A = 0 \\ A\cos(\sqrt{\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$
   ce qui équivaut à
   $$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \text{ ou } \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}.$$
   On doit alors distinguer deux cas sur λ.
     - Si $\sin(\sqrt{\lambda}) \neq 0$, alors la seule solution est $\mathcal{S}_1 = \{0\}$.
     - Si $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$, alors $\mathcal{S}_1$ est l'ensemble des fonctions de la forme $f : x \mapsto B\sin(x\sqrt{\lambda})$, avec $B \in \mathbb{R}$ quelconque.

   Un réel $\lambda > 0$ vérifie $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ si et seulement si $\lambda \in \left\{ (k\pi)^2 \middle| k \in \mathbb{N}^* \right\}$. On peut donc conclure :
   - Si $\lambda = (k\pi)^2$, pour un entier $k > 0$, alors $\boxed{\mathcal{S}_1 = \mathrm{Vect}(x \mapsto \sin(k\pi x)).}$
   - Si $\lambda \notin \{(k\pi)^2 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$ alors $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{0\}.}$

II. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle homogène

3. Pour chaque $k \in [\![1, N-1]\!]$, récrivons l'équation $\dfrac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{1/N^2} + \lambda x_k = 0$ sous forme d'un produit matriciel.
   - Si $k \in [\![2, N-2]\!]$, on obtient :
   $$N^2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \dfrac{\lambda}{N^2} - 2 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$
   avec le coefficient $\dfrac{\lambda}{N^2} - 2$ en k-ième position.
   - Si $k = 1$, on obtient :
   $$N^2 \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{N^2} - 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$
   - Si $k = N-1$, on obtient :
   $$N^2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \dfrac{\lambda}{N^2} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

   Par conséquent une matrice qui convient est
   $$\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{N^2} - 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & \dfrac{\lambda}{N^2} - 2 \end{pmatrix}$$

4. Un scalaire λ appartient à Λ si et seulement si le noyau de $M_{N-1,\lambda}$ est non trivial. Or $M_{N-1,\lambda} = A_{N-1} - \left(2 - \dfrac{\lambda}{N^2}\right) I_{N-1}$. Donc
   $$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \in \Lambda \iff 2 - \frac{\lambda}{N^2} \in \mathrm{Sp}(A_{N-1}).}$$

5. La matrice A_n est $\boxed{\text{symétrique réelle, donc diagonalisable à valeurs propres réelles.}}$ La matrice A_{N-1} appartient à $\mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{R})$, donc a au plus $N-1$ valeurs propres. Il y a donc au plus $N-1$ réels λ tels que $2 - \dfrac{\lambda}{N^2} \in \mathrm{Sp}(A_{N-1})$, et par conséquent $\boxed{\mathrm{Card}(\Lambda) \leqslant N-1.}$

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_3) \iff \mathrm{rg}(A_3 - \lambda I_3) < 3$. Cependant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A_3 - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix} && L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow L_3 \leftarrow L_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1 \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda - \lambda^3 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda^2 - 1)L_2
\end{aligned}$$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_3) \iff 2\lambda - \lambda^3 = 0$, or $2\lambda - \lambda^3 = \lambda(2 - \lambda^2) = \lambda(\sqrt{2} - \lambda)(\sqrt{2} + \lambda)$, et par conséquent $\mathrm{Sp}(A_3) = \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Calculons les sous-espaces propres associés. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- X appartient à $E_0(A_3)$ si et seulement s'il vérifie $(A_3 - 0I_3)X = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

  ce qui donne $E_0(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- De même X appartient à $E_{\sqrt{2}}(A_3)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} -x\sqrt{2} + y = 0 \\ x - y\sqrt{2} + z = 0 \\ y - z\sqrt{2} = 0 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} -x\sqrt{2} + y = 0 \\ y - z\sqrt{2} = 0 \\ y - z\sqrt{2} = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 + L_1 \\
\iff &\begin{cases} x = z \\ y = z\sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

  ce qui donne $E_{\sqrt{2}}(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- De même $E_{-\sqrt{2}}(A_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Compte tenu des éléments propres, $A_3 = PDP^{-1}$ pour les matrices P et D suivantes :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

7. Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

- Supposons μ valeur propre de A_{N-1}. Alors il existe un vecteur non nul $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$ tel que $A_{N-1}X = \mu X$. Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} x_2 = \mu x_1 \\ x_3 = \mu x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} = \mu x_{N-2} - x_{N-3} \\ 0 = \mu x_{N-1} - x_{N-2} \end{cases} \tag{6}$$

  Soit alors la suite v définie par récurrence par $v_0 = 0$, $v_1 = x_1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = \mu v_{n+1} - v_n$. Les $N-2$ premières lignes du système (6) impliquent que $(v_1, v_2, \dots, v_{N-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$, tandis que la dernière ligne implique $v_N = 0$. On a donc construit une suite v qui vérifie les contraintes demandées, et n'est pas identiquement nulle puisque $(x_1, \dots, x_{N-1}) \neq (0, \dots, 0)$.
- Réciproquement supposons qu'il existe une suite non nulle v telle que $v_0 = v_N = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = \mu v_{n+1} - v_n$. Alors le $(N-1)$-uplet $X = (x_1, \dots, x_{N-1}) = (v_1, \dots, v_{N-1})$ vérifie le système (6). Par ailleurs, si par l'absurde v_1 était nul, alors par récurrence immédiate tous les termes de v seraient nuls, alors que v est une suite non nulle. Donc $v_1 \neq 0$. Par conséquent il existe $X \in \mathcal{M}_{N-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $A_{N-1}X = \mu X$ et $X \neq 0$, ce qui prouve $\mu \in \mathrm{Sp}(A_{N-1})$.

8. La relation $u_{n+2} = \mu u_{n+1} - u_n$ est une récurrence linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $X^2 - \mu X + 1$, dont le discriminant es $\Delta = \mu^2 - 4$.

   (a) Si $|\mu| > 2$ alors $\Delta > 0$, et le polynôme caractéristique a deux racines $r_1 = \dfrac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$. Dans ce cas, u est de la forme $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$, avec A et B réels. Les conditions au bord $u_0 = u_N = 0$ amènent le système homogène suivant sur A et B :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ar_1^N + Br_2^N = 0 \end{cases} \tag{7}$$

   Or le déterminant de ce système est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1^N & r_2^N \end{vmatrix} = r_2^N - r_1^N$. Or par les relations coefficients racines, $r_1 r_2 = 1$ donc r_1 et r_2 sont de même signe. La fonction $x \mapsto x^N$ étant strictement monotone aussi bien sur $\mathbb{R}_+$ que sur $\mathbb{R}_-$, on a donc $r_1 \neq r_2 \implies r_1^N \neq r_2^N \implies r_2^N - r_1^N \neq 0$. Le système (7) étant de déterminant non nul est inversible, donc $A = B = 0$, et la suite u est nulle.

   (b) Si $|\mu| = 2$ alors $\Delta = 0$, et le polynôme caractéristique a une racine double $r = \dfrac{\mu}{2}$. Dans ce cas, u est de la forme $u_n = (An + B)r^n$, avec A et B réels. Les conditions au bord $u_0 = u_N = 0$ donnent alors

$$\begin{cases} B = 0 \\ ANr^N + Br^N = 0 \end{cases}$$

   d'où $B = 0$ et $A = 0$, et par conséquent la suite u est encore nulle dans ce cas.

   (c) i. Dans le cas où $|\mu| < 2$, on a $\Delta < 0$ donc le polynôme caractéristique a deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2. Comme elles sont conjuguées, elles sont de même module, et de plus :

$$|r_1|^2 = r_1 \overline{r_1} = r_1 r_2 = 1$$

   d'après les relations coefficients racines, donc $\boxed{|r_1| = |r_2| = 1.}$

   ii. Les suites u solutions de la récurrence linéaire $u_{n+2} = \mu u_{n+1} - u_n$ sont les suites de la forme $A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$. Une telle suite vérifie $u_0 = u_N = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} A = 0 \\ A\cos(N\theta) + B\sin(N\theta) = 0. \end{cases}$$

- Si on suppose $\sin(N\theta) \neq 0$: alors u ne peut vérifier $u_0 = u_N = 0$ que si $A = B = 0$, donc si u est la suite nulle. D'après la question 7, cela implique que μ n'est pas valeur propre de A_{N-1}.
- Si on suppose $\sin(N\theta) = 0$: alors les suites de la forme $u_n = B\sin(n\theta)$ vérifient $u_0 = u_N = 0$. De plus, une telle suite u est non nulle pourvu que $B \neq 0$ et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, la question 7 implique que μ est une valeur propre de A_{N-1}.

Comme la condition $\sin(N\theta) = 0$ équivaut à $N\theta \in \pi\mathbb{Z}$, on a donc l'équivalence

$$\boxed{\mu \in \mathrm{Sp}(A_{N-1}) \iff \begin{cases} \theta \in \dfrac{\pi}{N}\mathbb{Z} \\ \theta \notin \pi\mathbb{Z} \end{cases}.}$$

iii.
- $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos\theta X + 1$, donc le polynôme $X^2 - \mu X + 1$ a pour racines $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ si et seulement si $\mu = 2\cos\theta$.
- Pour chaque $k \in [\![1, N-1]\!]$, soit $\theta_k = \dfrac{k\pi}{N}$ et soit $\mu_k = 2\cos\theta_k$, de sorte que $e^{i\theta_k}$ et $e^{-i\theta_k}$ sont les racines de $X^2 - \mu_k X + 1$.
- Alors $0 < \theta_k < \pi$ donc $2\cos\theta_k \in]-2, 2[$: on peut alors appliquer les résultats des questions 8.c.i et 8.c.ii.
- De plus $\sin(N\theta_k) = \sin(k\pi) = 0$ et $\theta_k \notin \pi\mathbb{Z}$. Par conséquent, d'après la question précédente μ_k est une valeur propre de A_{N-1}.
- Cependant la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{N-1} < \pi \implies \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{N-1}$$

donc les réels $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{N-1}$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes.
- Enfin, A_{N-1} est de taille $N-1$ donc ne peut avoir plus que $N-1$ valeurs propres.
- Conclusion : A_{N-1} a exactement $N-1$ valeurs propres distinctes, à savoir

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A_{N-1}) = \left\{ 2\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \middle| k = 1, 2, \ldots, N-1 \right\}.}$$

9. D'après la question 4 on a l'équivalence

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathrm{Sp}(A_{N-1}) \iff N^2(2-\mu) \in \Lambda.$$

Avec le résultat de la question 8.c.iii, on en déduit

$$\boxed{\Lambda = \left\{ 2N^2\left(1 - \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right) \middle| k = 1, 2, \ldots, N-1 \right\}.}$$

10. $\dfrac{2 - 2\cos(k\pi/N)}{1/N^2} = 2N^2(1 - \cos(k\pi/N))$.

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{k\pi}{N} = 0$ et $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, donc $\dfrac{2 - 2\cos(k\pi/N)}{1/N^2} \underset{N\to+\infty}{\sim} 2N^2\dfrac{(k\pi/N)^2}{2} = (k\pi)^2$.

Cet équivalent ne dépend pas de N, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{2 - 2\cos(k\pi/N)}{1/N^2} = (k\pi)^2.}$

11. À la question 2 (resp. à la question 9), on cherche quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles l'équation différentielle (resp. sa discrétisation) avec conditions aux bords admet des solutions non triviales.

Les valeurs de λ trouvées à la question 2 sont

$$\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \ldots$$

et à la question 9 ce sont

$$\frac{2 - \cos(\pi/N)}{1/N^2}, \frac{2 - \cos(2\pi/N)}{1/N^2}, \frac{2 - \cos(3\pi/N)}{1/N^2}, \ldots, \frac{2 - \cos((N-1)\pi/N)}{1/N^2}$$

Le résultat de la question 10 montre donc que ces dernières valeurs (obtenues pour la discrétisation) tendent vers les valeurs de λ trouvées à la question 2 (obtenues pour l'équation différentielle) quand le nombre de points de la discrétisation tend vers $+\infty$.

III. Étude d'une discrétisation de l'équation différentielle avec second membre

12. $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $-2 + 2\cos(k\pi/N) = 2(-1 + \cos(k\pi/N)) \leqslant 0$ car cos est à valeurs dans $[-1, 1]$.
    Donc si $\lambda < 0$, alors toutes les valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_{N-1}$ sont strictement négatives, donc aucune n'est nulle.
    Par conséquent la matrice $M_{N-1,\lambda}$ est inversible, et le système $(**)$ a une seule solution.
13. $DX = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} x_{N-1} \end{pmatrix}$ donc $\|DX\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} d_k^2 x_k^2}$.
14. - La matrice $M_{N-1,\lambda}$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $M_{N-1,\lambda} = PD^tP$. De plus, quitte à changer l'ordre des colonnes de P, on peut supposer que les coefficients diagonaux de D sont $\mu_1, \dots, \mu_{N-1}$ dans cet ordre.
    - La relation $B = M_{N-1,\lambda}X$ devient $B = PD^tPX$. Par conséquent

$$\begin{aligned} {}^tBB &= {}^t(PD^tPX)PD^tPX \\ &= {}^tXPD^tPPD^tPX \\ &= {}^tXPDD^tPX & \text{car } {}^tPP = I_{N-1} \\ &= {}^t(D^tPX)D^tPX \end{aligned}$$

    ce qu'on peut récrire ${}^tBB = {}^t(DC)DC$ pour la matrice colonne $C = {}^tPX$. Aussi $\|B\| = \|DC\|$.
    - Si on note $c_1, \dots, c_{N-1}$ les coefficients de C, alors d'après la question 13 on a donc

$$\|B\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^2 c_k^2}.$$

    - Quand k varie de 1 à $N-1$, $\dfrac{k\pi}{N}$ reste entre 0 et π. Or cos est strictement décroissant sur cet intervalle. Par conséquent

$$\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{N-1}.$$

    Mais comme observé à la question 12, les valeurs propres de $M_{N-1,\lambda}$ sont strictement négatives quand $\lambda < 0$. Leurs valeurs absolues vérifient donc

$$|\mu_1| < |\mu_2| < \cdots < |\mu_{N-1}|$$

    et par conséquent, $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $\mu_k^2 \leqslant \mu_{N-1}^2$. En multipliant cette inégalité par c_k^2, en sommant et en utilisant la croissance de la racine carrée, on trouve donc

$$\|B\| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \mu_{N-1}^2 c_k^2} = |\mu_{N-1}| \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} c_k^2} = -\mu_{N-1} \|C\|.$$

    - Enfin, ${}^tCC = {}^t({}^tPX){}^tPX = {}^tXP^tPX = {}^tXX$ car ${}^tPP = I_{N-1}$; donc $\|C\| = \|X\|$. On a donc bien

$$\boxed{\|B\| \leqslant -\mu_{N-1} \|X\|.}$$

15. Commençons par constater

$$\begin{aligned} M_{N-1,\lambda}(X - \tilde{X}) &= M_{N-1,\lambda}X - M_{N-1,\lambda}\tilde{X} \\ &= B - \tilde{B}. \end{aligned}$$

    Donc en conduisant le même calcul qu'à la question précédente (en remplaçant B par $B - \tilde{B}$ et X par $X - \tilde{X}$) obtient $\|B - \tilde{B}\| = \|DH\|$, où H est la matrice colonne ${}^tP(X - \tilde{X})$, qui est de même norme que $X - \tilde{X}$. En notant $h_1, \dots, h_{N-1}$ les coefficients de H, on a donc

$$\begin{aligned}
\|B - \tilde{B}\| &= \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^2 h_k^2} \\
&\geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} \mu_1^2 h_k^2} && \text{car } |\mu_1| = \min(|\mu_1|, \dots, |\mu_n|) \\
&\geqslant |\mu_1| \sqrt{\sum_{k=1}^{N-1} h_k^2}
\end{aligned}$$

Donc $\|B - \tilde{B}\| \geqslant -\mu_1 \|H\| = -\mu_1 \|X - \tilde{X}\|$. En divisant par $-\mu_1 > 0$, on a donc bien

$$\boxed{\|X - \tilde{X}\| \leqslant -\frac{1}{\mu_1} \|B - \tilde{B}\|.}$$

16. Comme B est non nul, le résultat de la question 14 donne $0 < \|B\| \leqslant -\mu_{N-1} \|X\|$, donc $\|B\|$ et $\|X\|$ sont strictement positif. En divisant par leur produit, on trouve $\dfrac{1}{\|X\|} \leqslant -\mu_{N-1} \dfrac{1}{\|B\|}$.
En multipliant cette inégalité et celle obtenue à la question 15, tous les membres étant positifs on trouve
$$\boxed{\frac{\|X - \tilde{X}\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\mu_{N-1}}{\mu_1} \frac{\|B - \tilde{B}\|}{\|B\|}.}$$

17. $\dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1} = \dfrac{1 - \cos((N-1)\pi/N) - \lambda/(2N^2)}{1 - \cos(\pi/N) - \lambda/(2N^2)} = \dfrac{1 + \cos(\pi/N) - \lambda/(2N^2)}{1 - \cos(\pi/N) - \lambda/(2N^2)}$ en utilisant $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Or par opérations sur les limites,
$$\lim_{N \to +\infty} (1 + \cos(\pi/N) - \lambda/(2N^2)) = 2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{N \to +\infty} (1 - \cos(\pi/N) - \lambda/(2N^2)) = 0.$$
De plus $1 - \cos(\pi/N) - \lambda/(2N^2) > 0$ car $\cos \leqslant 1$ et $\lambda < 0$.
Donc par quotient de limites $\boxed{\lim_{N \to +\infty} \dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1} = +\infty.}$

18. Soit les vecteurs colonnes :
    - X un vecteur propre de $M_{N-1,\lambda}$ associé à μ_{N-1} ;
    - $B = M_{N-1,\lambda} X = \mu_{N-1} X$;
    - V un vecteur propre associé à μ_1 ;
    - $\tilde{X} = X + V$;
    - $\tilde{B} = M_{N-1,\lambda} X = B + \mu_1 V$.

    Comme des vecteurs propres sont toujours non nuls, on a $X \neq 0$ et $V \neq 0$. Et comme μ_1 et μ_{N-1} sont non nuls (vu à la question 12), on a aussi $B \neq 0$ et $B - \tilde{B} = \mu_1 V \neq 0$, donc $\boxed{B \text{ et } \tilde{B} \text{ sont différents.}}$
    En outre :
    - d'une part $\|B - \tilde{B}\| = \|\mu_1 V\| = -\mu_1 \|V\| = -\mu_1 \|X - \tilde{X}\|$, ce qu'on peut récrire $\|X - \tilde{X}\| = -\dfrac{1}{\mu_1} \|B - \tilde{B}\|$;
    - et d'autre part $\|B\| = \|\mu_{N-1,\lambda} V\| = -\mu_{N-1,\lambda} \|V\|$.

    En multipliant ces deux égalités on trouve bien $\boxed{\dfrac{\|X - \tilde{X}\|}{\|X\|} = \dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1} \dfrac{\|B - \tilde{B}\|}{\|B\|}.}$

19. Supposons que le second membre B ne soit connu qu'approximativement, par exemple avec une erreur relative de $\dfrac{1}{100}$. C'est-à-dire qu'on dispose à la place de B d'une approximation $\tilde{B}$ avec une erreur relative $\dfrac{\|B - \tilde{B}\|}{\|B\|} = \dfrac{1}{100}$.
En résolvant le système $(**)$ avec le second membre $\tilde{B}$ au lieu de B, on obtient la solution $\tilde{X}$ au lieu de X.

Les questions précédentes montrent que l'erreur relative sur les solutions, à savoir $\dfrac{\|X - \tilde{X}\|}{\|X\|}$, peut être plus grande que l'erreur relative sur B par un facteur $\dfrac{\mu_{N-1}}{\mu_1}$. Or ce facteur tend vers $+\infty$ avec N : par conséquent une petite erreur relative sur B peut provoquer une grande erreur relative sur X.