I. Résultats préliminaires

1. (a) Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$D_3X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ z = b \\ x = c \end{cases}.$$

On en déduit que D_3 est inversible, d'inverse :

$$D_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par le même raisonnement, on trouve que D_4 est inversible, d'inverse :

$$D_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On conjecture immédiatement que D_p est inversible, d'inverse :

$$\forall p \geqslant 3,\ D_p^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_p,$$

la conjecture est vérifiée.

2. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Puisque $\lambda x + y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_p + y_p \end{pmatrix}$,

$$f(\lambda x + y) = \sum_{k=1}^{p} (\lambda x_k + y_k) = \lambda \left(\sum_{k=1}^{p} x_k \right) + \sum_{k=1}^{p} y_k = \lambda f(x) + f(y).$$

L'application f est donc $\mathbb{C}$-linéaire.

(b) Il y a deux façons de prouver que f n'est pas injective :

- via un contre-exemple : le vecteur non nul $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au noyau de f ;
- via le théorème du rang ($\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie) : si f était injective, on aurait $\operatorname{rg} f = \dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) = p$, ce qui est exclu car $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \mathbb{C} = 1 < p$.

(c) Puisque f n'est pas l'application nulle, $\operatorname{rg} f > 0$. Puisque $\operatorname{rg} f \leqslant \dim \mathbb{C} = 1$, $\operatorname{rg} f = 1$. On en déduit que $\operatorname{Im} f = \mathbb{C}$, i.e. f est surjective.

(d) En appliquant le théorème du rang, on trouve :

$$\dim \operatorname{Ker} f + 1 = \dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) = p.$$

Le noyau de f est donc de dimension $p - 1$.

3. On réduit une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{2i\pi}{p}} \neq 1$:

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} z_k = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{p}} \right)^k = \frac{1}{p} \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{p}}} = 0.$$

Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, z_k est l'affixe du point A_k mais aussi du vecteur $\overrightarrow{OA_k}$.

Ainsi, $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} z_k$ est l'affixe du vecteur

$$\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{OO}.$$

On en déduit que O est l'isobarycentre des points $A_0, \dots, A_{p-1}$.

4. Puisque $z \neq 0$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = re^{i\theta}$. Ainsi, par unicité du module et de l'argument modulo 2π :

$$\begin{aligned} z^p = 1 &\Leftrightarrow r^p e^{ip\theta} = 1e^{i0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^p = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ p\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = 0 + \dfrac{2k\pi}{p} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ z = e^{\frac{2ik\pi}{p}}. \end{aligned}$$

II. Étude d'un modèle de diffusion sur un cercle

5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, p-1]\!]$. Puisque $([X_n = j])_{0 \leqslant j \leqslant p-1}$ forme un système complet d'événements, la formule des probabilités totales assure que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i)\, \mathbb{P}(X_n = j).$$

Or d'après l'énoncé, on a :

$$\forall j \in [\![0, p-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i = j-1 \text{ ou } (i = p-1 \text{ et } j = 0) \\ \frac{1}{2} & \text{si } i = j+1 \text{ ou } (i = 0 \text{ et } j = p-1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = M_p X_n$ où :

$$\begin{aligned} M_p &= \left(P_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i)\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant p-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. La relation de récurrence précédente permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M_p^n X_0 = M_p^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7. On a bien :

$$\frac{1}{2}\left(D_p + D_p^{-1}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_p.$$

8. (a) La matrice M_3 est symétrique à coefficients réels, elle est donc diagonalisable. Déterminons le spectre de M_3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M_3 - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}(2M_3 - 2\lambda I_3) \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda \\ -2\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 1+2\lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 1-4\lambda^2 & 1+2\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\lambda L_1 \end{matrix} \\ &= \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda & 1 \\ 0 & 1+2\lambda & -2\lambda-1 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - (1-2\lambda)L_2 \end{aligned}$$

où $P(\lambda) = 1 + 2\lambda + (1-2\lambda)(1+2\lambda) = 2(1+2\lambda)(1-\lambda)$. Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(M_3) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M_3 - \lambda I_3) \neq 3 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$M_3X = X \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}.$$

On en déduit que $E_1 = \mathrm{Ker}(M_3 - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$$M_3X = -\frac{1}{2}X \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - z.$$

On en déduit que $E_{-\frac{1}{2}} = \mathrm{Ker}\left(M_3 + \frac{1}{2}I_3\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On déduit des calculs précédents que $M_3 = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} PX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = a \\ x + y = b \\ x + z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = a \\ 2y + z = b - a \\ y + 2z = c - a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b+c}{3} \\ y = \dfrac{-a+2b-c}{3} \\ z = \dfrac{2(c-a)-(b-a)}{3} = \dfrac{-a-b+2c}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) D'après les questions précédentes, on peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M_p^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

Puisque $-1 \leqslant -\frac{1}{2} < 1$, il vient que :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \mathbb{P}(U_n = 1) \\ \mathbb{P}(U_n = 2) \end{pmatrix} &= \lim_{n\to+\infty} M_p^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que toutes les positions tendent à être équiprobables lorsque n est grand.

9. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{p,1}\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$D_pX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \quad\vdots \\ x_{p-2} = \lambda x_{p-1} \\ x_{p-1} = \lambda x_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = \lambda^p x_p \\ x_1 = \lambda^{p-1} x_p \\ \quad\vdots \\ x_{p-2} = \lambda^2 x_p \\ x_{p-1} = \lambda x_p \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^p = 1 \text{ et } \begin{cases} x_1 = \lambda^{p-1} x_p \\ \quad\vdots \\ x_{p-2} = \lambda^2 x_p \\ x_{p-1} = \lambda x_p. \end{cases}$$

On en déduit que les valeurs propres de D_p sont les racines p-ème de l'unité :

$$\mathrm{Sp}(D_p) = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{p}},\ k \in [\![0, p-1]\!]\right\} = \{z_k,\ k \in [\![0, p-1]\!]\}.$$

Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, l'espace associé à la valeur propre $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ est :

$$\mathrm{Ker}\,(D_p - z_k I_p) = \mathrm{Vect}(X_k) \text{ où } X_k = \begin{pmatrix} z_k^{p-1} \\ z_k^{p-2} \\ \vdots \\ z_k \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10. La matrice D_p admet p valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et d'après la question précédente, il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ tel que :

$$D_p = Q \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $z_k \neq 1$; on a donc :

$$f(X_k) = \sum_{i=0}^{p-1} z_k^i = \frac{1 - z_k^p}{1 - z_k} = 0.$$

On en déduit que $X_k \in \mathrm{Ker}\, f$ et donc que l'espace propre $\mathrm{Ker}(D_p - z_k I_p)$, engendré par X_k, est inclus dans le noyau de f par linéarité.

10. D'après la question précédente, on a :

$$D_p^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix} Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \frac{1}{z_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{z_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

On en déduit donc que :

$$M_p = \frac{1}{2}\left(D_p + D_p^{-1}\right) = \frac{1}{2} Q \begin{pmatrix} z_0 + \frac{1}{z_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_1 + \frac{1}{z_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z_{p-1} + \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

La matrice M_p est donc diagonalisable (via la même base de vecteurs propres que D_p) et admet pour valeurs propres les complexes $\left(\frac{1}{2}\left(z_k + \frac{1}{z_k}\right)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$.

12. Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Puisque $\frac{1}{z_k} = e^{-\frac{2ik\pi}{p}} = \overline{z_k}$, on trouve :

$$\frac{1}{2}\left(z_k + \frac{1}{z_k}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z_k + \overline{z_k}\right) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_k) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow k = 0.$$

Le réel 1 est donc valeur propre de M_p et les $p-1$ autres valeurs propres sont distinctes de 1, donc l'espace propre associé à 1 est engendré par le premier vecteur colonne de la matrice Q, i.e. :

$$G_0 = \mathrm{Vect}(X_0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

13. Soit $j \in [\![0, p-1]\!]$. D'après les calculs de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(z_j + \frac{1}{z_j}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(z_j + \overline{z_j}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_k) = \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2j\pi}{p}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2j\pi}{p} = \frac{2k\pi}{p} \text{ ou } \frac{2j\pi}{p} = 2\pi - \frac{2k\pi}{p} \\ &\Leftrightarrow j = k \text{ ou } j = p - k \end{aligned}$$

Remarquons que $p - k \neq k$ puisque $p - k \in [\![q+1, 2q]\!]$.

On en déduit que $\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$ est bien une valeur propre de M_p et l'espace propre G_k associé est :

$$G_k = \mathrm{Vect}(X_k, X_{p-k})$$

Puisque les vecteurs X_k et X_{2p-k} (ils appartiennent à une base de vecteurs propres de D_p), l'espace propre G_k est bien de dimension 2.

D'après la question 10, les vecteurs X_k et X_{p-k} appartiennent au noyau de f donc G_k est inclus dans ce même noyau par linéarité.

14. (a) Montrons l'existence de cette décomposition. Puisque $(X_0, \dots, X_{2q})$ forme une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, il existe $(a_0, \dots, a_{2q})$ tel que :

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=0}^{2q} a_k X_k \\ &= a_0 X_0 + \sum_{k=1}^{q} a_k X_k + \sum_{k=1}^{q} a_{p-k} X_{p-k} \\ &= a_0 X_0 + \sum_{k=1}^{q} (a_k X_k + a_{p-k} X_{p-k}) \\ &= V_0 + \sum_{k=1}^{q} V_k, \end{aligned}$$

où $V_0 = a_0 X_0 \in G_0$ et, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, $V_k = a_k X_k + a_{p-k} X_{p-k} \in G_k$.
Montrons l'unicité de cette décomposition. Supposons qu'il existe $(V_0, \dots, V_{2q})$ et $(W_0, \dots, W_{2q})$ dans $G_0 \times \cdots \times G_q$ tel que :

$$V = \sum_{k=0}^{2q} V_k = \sum_{k=0}^{2q} W_k.$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{2q} (V_k - W_k).$$

La famille $(V_k - W_k)_{k \in [\![0,]\!] q}$ est donc liée. S'il y a au moins un vecteur non nul dans cette famille, les vecteurs non nuls de cette famille appartiennent à des espaces propres deux-à-deux distincts, ils forment donc une famille libre, ce qui est exclu d'après ce qui précède. On en déduit que tous ces vecteurs sont nuls, i.e. : $\forall k \in [\![0, q]\!],\ V_k = W_k$, ce qui assure l'unicité de la décomposition.

(b) D'après le résultat des questions 12 et 13, on a :

$$f(V) = \sum_{k=0}^{2q} f(V_k) = f(V_0)$$

Puisque $V_0 \in G_0 = \mathrm{Vect}(X_0) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, il existe $v_0 \in \mathbb{C}$ tel que $V_0 = v_0 X_0 = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $f(V) = f(V_0) = v_0 f(X_0) = v_0 p$. On en déduit donc que :

$$V_0 = v_0 X_0 = \frac{1}{p} f(V) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15. (a) Puisque $\dfrac{2k\pi}{p} \in]0, \pi[,\ -1 < \cos\left(\dfrac{2k\pi}{p}\right) < 1$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos\left(\dfrac{2k\pi}{p}\right)^n = 0$.

(b) Remarquons que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} \mathbb{P}(U_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(U_n = 2) \end{pmatrix} = M_p^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'après la question 14.(a), il existe $(V_0 \times V_q) \in G_0 \times G_q$ tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{q} V_k.$$

Notons Y ce vecteur de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. On a alors $f(Y) = 1$. Par définition des vecteurs $V_0, \dots, V_q$:

$$\begin{aligned} M_p^n Y &= M_p^n V_0 + \sum_{k=1}^{q} M_p^n V_k \\ &= V_0 + \sum_{k=1}^{q} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n V_k \\ &= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{q} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n V_k. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $\ell \in [\![0, p-1]\!]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_n = \ell) = \dfrac{1}{p}$.

(c) La conclusion est la même qu'à la question 8.(c) : toutes les positions tendent à être équiprobables lorsque n est grand.

* *
*