1 Modèles de dynamique de population

Exercice 1. Modèles de Malthus et de Verhulst [Corrigé] ★★☆

Dans le cadre de l'étude d'une espèce de lièvres, on souhaite modéliser la dynamique d'évolution temporelle de cette population. On note t le temps et $x(t)$ l'effectif des lièvres en fonction du temps. On suppose, pour commencer, que la population est isolée dans un environnement aux ressources abondantes. On propose de modéliser la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx \tag{1}$$

où $r > 0$ est une constante représentant le taux de reproduction intrinsèque des lièvres.

1. **Modèle de Malthus**

   a. Résoudre l'équation différentielle (1) de condition initiale $x(0) = x_0 > 0$.

   b. Tracer à la main l'allure de la solution de (1).

   c. Que peut-on dire de l'évolution de la population de lièvres avec ce modèle? L'équation différentielle (1) est-elle une modélisation raisonnable?

2. **Modèle de Verhulst**

   On suppose à présent que les ressources du milieu sont limitées et on modélise la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle suivante, appelée **équation logistique** :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{2}$$

   où K est une constante strictement positive.

   a. Intuitivement, quelle allure a une solution $x(\cdot)$ de (2) tant que l'effectif de lièvres $x(t)$ reste petit ?

   b. Dresser le tableau de signes de $ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$ en fonction d'un réel $u \geqslant 0$.

   c. Soit $x(\cdot)$ une solution de (2) avec $x(0) = x_0 > 0$. Est-ce possible qu'il existe un $t > 0$ tel que $x(t) = 0$? *La réponse sera justifiée en s'appuyant sur le tableau de signes obtenu à la question précédente.*

   d. Soit $x(\cdot)$ une solution de (2) avec $x(0) = x_0 > 0$. Pour tout $t \geqslant 0$, on pose $z(t) = \frac{1}{x(t)}$.

   Montrer que $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{K} - rz$.

   e. Résoudre l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{K} - rz$. On exprimera la solution en fonction de t, r, K et $z_0 = z(0)$.

   f. En déduire une expression de $x(t)$ en fonction de t, r, K et x_0.

   g. Quelle est la limite de $x(t)$ quand t tend vers l'infini ?

   h. Tracer à la main l'allure des solutions obtenues pour une condition initiale petite $x_0 > 0$ d'une part et pour une condition initiale $x_0 > K$ d'autre part.

   i. En s'appuyant sur les réponses aux questions précédentes, décrire les différences entre les modèles (1) et (2) et donner une interprétation biologique de la constante K.

Exercice 2. Modèle de Gompertz [Corrigé] ★★☆

On note $P(t)$ l'effectif d'une population à l'instant t, et on suppose que P est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe des constantes k et M, avec M strictement positive, telles que :

$$\forall t \geqslant 0,\ P'(t) = kP(t)\ln\left(\frac{M}{P(t)}\right).$$

1. On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $Q = \ln(P)$.

   a. Démontrer qu'une fonction P est solution de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\frac{M}{y}\right)$ si, et seulement si, Q est solution de l'équation différentielle à déterminer.

   b. Résoudre l'équation différentielle $z' = -kz + k\ln(M)$.

   c. En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que :

$$\forall t \geqslant 0,\ P(t) = Me^{Ce^{-kt}}.$$

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ en fonction du signe des constantes C et k.

3. Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?

4. Un laboratoire étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie d'extinction. La population initiale est de 1000 individus. L'effectif de la population, exprimé en milliers, est modélisé par une fonction P vérifiant le modèle Gompertz avec $k = -\frac{1}{20}$ et $M = 20$.

   a. Comment évolue cette population au cours du temps ? Justifier l'expression “population en voie d'extinction”.

   b. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de la population sera inférieure à 10 individus ? Justifier.

2 Exemple d'équations différentielles

Exercice 3. Équations à variables séparables [Corrigé] ★★☆

On dit qu'une équation différentielle d'inconnue y d'ordre 1 est à **variables séparables** si elle peut s'écrire sous la forme $y'g(y) = h(x)$.

1. On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$y' = (1+x)(1+y^2) \tag{E_1}$$

   a. Soit y une solution de (E_1) définie sur un intervalle I. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ \arctan(y(x)) = x + \frac{x^2}{2} + C.$$

   b. En déduire que y est solution de (E_1) sur un intervalle I si, et seulement si, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ y(x) = \tan\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right).$$

2. Résoudre de la même manière l'équation différentielle : $(E_2) : y' = e^{x-y}$

Exercice 4. Équations de Bernoulli et de Ricatti [Corrigé] ★★☆

1. **Équation de Bernoulli**

   En posant $z = y^{1-m}$ et en choisissant convenablement m, déterminer, pour chaque équation différentielle ci-dessous, les solutions qui ne s'annulent pas :

   (i) $y' = y + x\sqrt{y}$ (ii) $xy' + 3y = x^2y^2$

2. **Équation de Ricatti**

   a. Déterminer une solution particulière y_1 de l'équation différentielle :

$$y' = (y-x)^2 \tag{E_1}$$

   b. Si y est une solution de (E_1), montrer que $z = y - y_1$ vérifie une équation de Bernoulli, qu'on notera (E_2).

   c. Résoudre (E_1) en admettant que toute solution de (E_2) est soit nulle soit ne s'annule pas sur son intervalle de définition.

3 Équations différentielles partielles (EDP)

Exercice 5. [Corrigé] ★★☆

On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

1. Soit f une fonction solution. Déterminer les dérivées partielles de la fonction

$$g : (u,v) \mapsto f(3u - v, v - 2u).$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle partielle.

Exercice 6. [Corrigé] ★★☆

Dans tout l'exercice, x et y sont deux fonctions de la variable t, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, de dérivées $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, V est une fonction des variables réelles x et y, définie sur un produit cartésien d'intervalles de $\mathbb{R}$, de dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$. On suppose que (x,y) est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - xy \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + xy \end{cases} \tag{S}$$

et que V est solution sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ de l'équation différentielle partielle de :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x(1-y)\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = y(1-x)\frac{\partial V}{\partial y}(x,y). \tag{E}$$

1. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto V(x(t), y(t))$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer deux fonction ϕ et ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que la fonction

$$V : (x,y) \mapsto \phi(x) + \psi(y)$$

   soit solution de (E).