# 1 Étudier la nature d'une série

Pour étudier la nature d'une série réelle, on suit les étapes ci-dessous.

(i) **Linéarité** : on vérifie si le terme général s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire des termes généraux de séries convergences. Dans ce cas, la série converge.

(ii) **Séries à termes positifs** (ou à termes de signes constants) :

- **Critère de comparaison de séries à termes positifs** : si la série est à termes positifs, on cherche à majorer (resp. minorer) son terme général par le terme général d'une série convergente (resp. divergente).
- **Critère d'équivalence de séries à termes positifs** : si la série est à termes positifs, on cherche un équivalent de son terme général.

(iii) **Séries à termes de signe non constant** : on cherche à se ramener au cas précédent en étudiant la convergence absolue de la série.

(iv) **Passage aux sommes partielles** : on considère la suite des sommes partielles, dont on montre la convergence par différents calculs (manipulation d'expressions, changement d'indices, passage à la limite, etc).

*On peut par exemple faire apparaitre une somme télescopique ou réaliser une comparaison série/intégrale.*

**Exercice 1**. *Montrons que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n-5}{3^{n+1}}$ *converge.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{2n-5}{3^{n+1}} = \frac{2n}{3^{n+1}} - \frac{5}{3^{n+1}} = \frac{2}{9}\left(n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

Puisque $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (série géométrique) et $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (série géométrique dérivée) convergent.

Par linéarité, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n-5}{3^{n+1}}$ converge.

**Exercice 2**. *Montrons que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$. Puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge aussi par le critère de comparaison de séries à termes positifs.

**Exercice 3**. *Montrons que la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ *converge.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} = \exp\left(-n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \geqslant 0$. Donc :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-n + \frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} e^{o(1)} = 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n+\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{2}}\left(e^{-1}\right)^n$. Puisque $e^{-1} \in ]-1,1[$, la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(e^{-1}\right)^n$ converge. Par linéarité la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{\frac{1}{2}}\left(e^{-1}\right)^n$ converge. D'après le critère d'équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ converge.

**Exercice 4**. *Montrons que la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos^2 n}{n^3}$ *converge.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\frac{\cos^2 n}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$. Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos^2 n}{n^3}$ converge absolument (donc converge) aussi par le critère de comparaison de séries à termes positifs.

**Exercice 5**. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. *En déduire que la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$ converge (et sa somme vaut 1).

*On peut parfois conjecturer la nature d'une série en comparant le comportement asymptotique de son terme général avec celui de termes généraux de séries de référence.*

**Exercice 6**. *Montrer que :* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant e^{-\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. *En déduire que* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ *converge.*

Par croissances comparées, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0$. Par définition de la limite, il existe donc un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a : $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant n^2 e^{-\sqrt{n}} \leqslant 1$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a alors : $0 \leqslant e^{-\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Puisque la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}$ converge aussi par le critère de comparaison de séries à termes positifs.

## 2 Calculer la somme d'une série convergente

Pour calculer la somme d'une série convergente, on peut utiliser les deux méthodes ci-dessous.

- **Linéarité et sommes de séries de référence** : on écrit le terme général de la série comme une combinaison linéaire de termes généraux de séries de référence dont la somme est connue.
- **Passage aux sommes partielles** : on considère la suite des sommes partielles dont on détermine la limite par différents calculs (manipulation d'expressions, changement d'indices, sommes télescopiques, etc).

On remarquera que ces deux méthodes permettent de montrer la convergence de la série (avant de calculer sa somme).

**Exercice 7**. *Montrons que la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$ *converge et calculons sa somme.*

Pour tout entier naturel $n$, on a :

$$\frac{n^2}{2^n} = \frac{n(n-1)+n}{2^n} = \frac{1}{4}\left(n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) + \frac{1}{2}\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Puisque les séries géométriques dérivées $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ convergent (car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$), la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2}{2^n}$ converge par linéarité et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{4}\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= 6.
\end{aligned}$$

**Exercice 8**. *Montrons que la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *converge et calculons sa somme.*

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\
&= \ln(n+1) - \ln 2 - \ln n \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2 \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln 2.
\end{aligned}$$

On en déduit que la série série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et a pour somme $-\ln 2$.