

1 Définitions

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle. On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par :

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

Cette série est notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Le réel S_n est appelé la **somme partielle de rang n**.

Remarque 2

Une série est un cas particulier de suites ; c'est une suite de sommes partielles.

Exemple 3

- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} n$ est la suite $\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Si $q \neq 1$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$ est la suite $\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Définition 4

On dit qu'une série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ **converge** (resp. **diverge**) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

En cas de convergence, on appelle **somme** de la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la limite de la suite des sommes partielles, notée :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

On suppose désormais les séries étudiées définies à partir du rang $n_0 = 0$; on peut s'y ramener, quitte à définir les premiers termes de la série comme étant nuls.

Remarque 5

On ne change pas la nature (convergence ou divergence) d'une série si on modifie, supprime ou ajoute un nombre fini de termes. En particulier, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ont même nature.

Remarque 6

Il convient de ne pas mélanger les notations $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: la notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ désigne une suite (et non un nombre), tandis que la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ désigne une limite réelle (donc un nombre).

Par définition, la somme d'une série est une limite ; pour la manipuler, il est indispensable de justifier a priori que cette limite existe.

Exemple 7 (Série harmonique)

La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est divergente.

Exemple 8

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ est convergente et sa somme vaut 2.

2 Propriétés

Proposition 9 (*Linéarité*)

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries réelles.

(i) Pour tout réel $\lambda \neq 0$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda u_n$ sont de même nature.

De plus, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

(ii) Si les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont convergentes alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(iii) Si l'une des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ ou $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge tandis que l'autre diverge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ diverge.

Démonstration.

Exemple 10

|| La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}$ diverge.

Exemple 11

|| La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}$ converge.

Remarque 12

Si les deux séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ divergent, on ne peut pas conclure sur la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ divergent mais $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ converge.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n = \frac{1}{n}$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ divergent et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ diverge.

Remarque 13

La somme d'une série est une limite. On vérifiera donc **toujours** la convergence de cette série avant de manipuler sa somme. Cela évitera d'écrire des **aberrations** telles que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 1.$$

Exemple 14 (Série télescopique)

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ converge alors que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n+1}$ divergent.

Remarque 15 (À retenir)

Pour étudier une série télescopique, on repassera toujours aux sommes partielles.

Lemme 16 (*Hors-programme*)

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ une série réelle converge. Alors son terme général tend vers 0, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

Remarque 17

Le résultat précédent est clairement hors-programme mais s'avère très utile pour **conjecturer** qu'une série diverge. En effet, par contraposée, si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, alors la série diverge. Attention, la réciproque est fausse. La série harmonique est un parfait contre-exemple : elle diverge alors que son terme général tend vers 0.

3 Séries à termes positifs

Définition 18

On dit qu'une série réelle $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est **à termes positifs** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

3.1 Critère de comparaison de séries à termes positifs

Théorème 19 (*Critère de comparaison de séries à termes positifs*)

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries réelles dont les termes généraux vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$.

- (i) Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge.
- (ii) Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge.

Démonstration.

Remarque 20

On peut affaiblir l'hypothèse du critère de comparaison : le résultat reste vrai lorsqu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

Exemple 21

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge. On pourra utiliser l'inégalité : $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$.

Exemple 22

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3^n + 1}$ converge.

3.2 Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs**Théorème 23** (*Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs*)

Soient $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ deux séries réelles à termes positifs.
 Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

Exemple 24

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n + n}{3^n - 1}$ converge.

Exemple 25

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{-2n}{3n^2 + 5n + 1}$ diverge.

3.3 Convergence absolue

Définition 26 (*Convergence absolue*)

On dit qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge absolument si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ converge.

Théorème 27 (*Inégalité triangulaire*)

Si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, elle est convergente. Dans ce cas, on peut comparer leurs sommes :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration.

Remarque 28

La réciproque est fautive : il existe des séries convergentes mais non absolument convergentes. Ces séries sont dites **semi-convergentes** (leur étude est hors-programme).

4 Convergence et somme de séries de référence

Théorème 29 (*Convergence de la série exponentielle (admise)*)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Exemple 30

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}$.

Théorème 31 (*Séries géométriques - séries géométriques dérivées*)

- (i) La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n$, appelée **série géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$** , converge si, et seulement si, $q \in]-1, 1[$ et :

$$\forall q \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

- (ii) Les séries $\sum_{n \geq 1} nq^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)q^{n-2}$, appelées **séries géométriques dérivées de raison $q \in \mathbb{R}$** (d'ordre 1 et 2), convergent si, et seulement si, $q \in]-1, 1[$ et :

$$\forall q \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Démonstration.

Exemple 32

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n+1}{2^n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = 3$.

Théorème 33 (*Comparaison série-intégrale - Séries de Riemann*)

La série harmonique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge

Démonstration.