# 1 Modèles de dynamique de population

**Exercice 1. Modèles de Malthus et de Verhulst** [Corrigé] ★★☆

Dans le cadre de l'étude d'une espèce de lièvres, on souhaite modéliser la dynamique d'évolution temporelle de cette population. On note $t$ le temps et $x(t)$ l'effectif des lièvres en fonction du temps. On suppose, pour commencer, que la population est isolée dans un environnement aux ressources abondantes. On propose de modéliser la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx \tag{1}$$

où $r > 0$ est une constante représentant le taux de reproduction intrinsèque des lièvres.

1. **Modèle de Malthus**

   a. Résoudre l'équation différentielle (1) de condition initiale $x(0) = x_0 > 0$.

   b. Tracer à la main l'allure de la solution de (1).

   c. Que peut-on dire de l'évolution de la population de lièvres avec ce modèle? L'équation différentielle (1) est-elle une modélisation raisonnable?

2. **Modèle de Verhulst**

   On suppose à présent que les ressources du milieu sont limitées et on modélise la dynamique de population de lièvres par l'équation différentielle suivante, appelée **équation logistique** :

   $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \tag{2}$$

   où $K$ est une constante strictement positive.

   a. Intuitivement, quelle allure a une solution $x(\cdot)$ de (2) tant que l'effectif de lièvres $x(t)$ reste petit ?

   b. Dresser le tableau de signes de $ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$ en fonction d'un réel $u \geqslant 0$.

   c. Soit $x(\cdot)$ une solution de (2) avec $x(0) = x_0 > 0$. Est-ce possible qu'il existe un $t > 0$ tel que $x(t) = 0$ ? *La réponse sera justifiée en s'appuyant sur le tableau de signes obtenu à la question précédente.*

   d. Soit $x(\cdot)$ une solution de (2) avec $x(0) = x_0 > 0$. Pour tout $t \geqslant 0$, on pose $z(t) = \dfrac{1}{x(t)}$.

   Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r}{K} - rz$.

   e. Résoudre l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{r}{K} - rz$. On exprimera la solution en fonction de $t, r, K$ et $z_0 = z(0)$.

   f. En déduire une expression de $x(t)$ en fonction de $t, r, K$ et $x_0$.

   g. Quelle est la limite de $x(t)$ quand $t$ tend vers l'infini ?

   h. Tracer à la main l'allure des solutions obtenues pour une condition initiale petite $x_0 > 0$ d'une part et pour une condition initiale $x_0 > K$ d'autre part.

   i. En s'appuyant sur les réponses aux questions précédentes, décrire les différences entre les modèles (1) et (2) et donner une interprétation biologique de la constante $K$.

**Exercice 2. Modèle de Gompertz** [Corrigé] ★★☆

On note $P(t)$ l'effectif d'une population à l'instant $t$, et on suppose que P est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose qu'il existe des constantes $k$ et $M$, avec M strictement positive, telles que :

$$\forall t \geqslant 0,\ P'(t) = kP(t)\ln\left(\frac{M}{P(t)}\right).$$

1. On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $Q = \ln(P)$.

   a. Démontrer qu'une fonction $P$ est solution de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\dfrac{M}{y}\right)$ si, et seulement si, $Q$ est solution de l'équation différentielle à déterminer.

   b. Résoudre l'équation différentielle $z' = -kz + k\ln(M)$.

   c. En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que :

   $$\forall t \geqslant 0,\ P(t) = Me^{Ce^{-kt}}.$$

2. Déterminer la limite de la fonction $P$ en $+\infty$ en fonction du signe des constantes $C$ et $k$.

3. Exprimer $C$ en fonction de la population initiale $P_0$ et de la constante $M$. De quoi dépend le signe de $C$ ?

4. Un laboratoire étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie d'extinction. La population initiale est de 1000 individus. L'effectif de la population, exprimé en milliers, est modélisé par une fonction P vérifiant le modèle Gompertz avec $k = -\frac{1}{20}$ et $M = 20$.

   a. Comment évolue cette population au cours du temps ? Justifier l'expression "population en voie d'extinction".

   b. Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de la population sera inférieure à 10 individus ? Justifier.

## 2 Exemple d'équations différentielles

**Exercice 3. Équations à variables séparables** [Corrigé] ★★☆

On dit qu'une équation différentielle d'inconnue $y$ d'ordre 1 est à **variables séparables** si elle peut s'écrire sous la forme $y'g(y) = h(x)$.

1. On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$y' = (1+x)(1+y^2) \qquad (E_1)$$

   a. Soit $y$ une solution de $(E_1)$ définie sur un intervalle $I$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ \arctan(y(x)) = x + \frac{x^2}{2} + C.$$

   b. En déduire que $y$ est solution de $(E_1)$ sur un intervalle $I$ si, et seulement si, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ y(x) = \tan\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right).$$

2. Résoudre de la même manière l'équation différentielle : $(E_2) : y' = e^{x-y}$

**Exercice 4. Équations de Bernoulli et de Ricatti** [Corrigé] ★★☆

1. **Équation de Bernoulli**

   En posant $z = y^{1-m}$ et en choisissant convenablement $m$, déterminer, pour chaque équation différentielle ci-dessous, les solutions qui ne s'annulent pas :

   (i) $y' = y + x\sqrt{y}$ (ii) $xy' + 3y = x^2y^2$

2. **Équation de Ricatti**

   a. Déterminer une solution particulière $y_1$ de l'équation différentielle :

$$y' = (y-x)^2 \qquad (E_1)$$

   b. Si $y$ est une solution de $(E_1)$, montrer que $z = y - y_1$ vérifie une équation de Bernoulli, qu'on notera $(E_2)$.

   c. Résoudre $(E_1)$ en admettant que toute solution de $(E_2)$ est soit nulle soit ne s'annule pas sur son intervalle de définition.

## 3 Équations différentielles partielles (EDP)

**Exercice 5.** [Corrigé] ★★☆

On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

1. Soit $f$ une fonction solution. Déterminer les dérivées partielles de la fonction

$$g : (u,v) \mapsto f(3u - v, v - 2u).$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle partielle.

**Exercice 6.** [Corrigé] ★★☆

Dans tout l'exercice, $x$ et $y$ sont deux fonctions de la variable $t$, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, de dérivées $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $V$ est une fonction des variables réelles $x$ et $y$, définie sur un produit cartésien d'intervalles de $\mathbb{R}$, de dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$. On suppose que $(x,y)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - xy \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + xy \end{cases} \qquad (S)$$

et que $V$ est solution sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ de l'équation différentielle partielle de :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x(1-y)\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = y(1-x)\frac{\partial V}{\partial y}(x,y). \qquad (E)$$

1. Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto V(x(t), y(t))$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Déterminer deux fonction $\phi$ et $\psi$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que la fonction

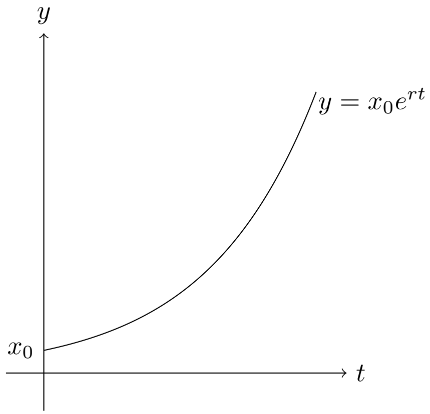
$$V : (x,y) \mapsto \phi(x) + \psi(y)$$

   soit solution de $(E)$.

**Corrigé de l'exercice 1.** [Énoncé]

1. a. On reconnait une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre et avec condition initiale. L'unique solution recherchée est la fonction $(t \mapsto x_0 e^{rt})$.

   b. On trace l'allure de la fonction $t \mapsto x_0 e^{rt}$ :




   c. La population de lièvres croit exponentiellement selon ce modèle. Ce modèle ne semble pas raisonnable car même si les ressources sont abondantes, elles ne sont pas infinies. L'effectif de la population ne peut donc pas tendre vers l'infini.

2. a. Tant que l'effectif $x(t)$ des lièvres reste petit (devant $K$), on peut approcher $rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$ par $rx(t)$. Sous cette hypothèse, l'équation (2) devient alors (1). On peut alors conjecturer qu'en première approximation, l'effectif des lièvres croit exponentiellement tant qu'il reste petit.

   b. On pouvait immédiatement reconnaître un trinôme du second degré qui admet 0 et $K$ pour racines.

| $u$ | $0$ | | $K$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ru$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1 - \frac{u}{K}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

   c. Supposons qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $x(t_1) = 0$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $t_1$ est le premier instant où la population de lièvres s'éteint. Par continuité de $x$, il existe $t_0 \in [0, t_1]$ tel que :

$$\forall t \in [t_0, t_1],\ 0 < x(t) < K.$$

   D'après la question précédente, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) > 0$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$. La fonction $x$ est donc strictement croissante (et positive) sur $[t_0, t_1]$. Il est donc impossible qu'elle s'annule en $t_1$.

   d. En dérivant, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{x^2} \times rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) = \frac{r}{K} - \frac{r}{x} = \frac{r}{K} - rz.$$

   e. On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec condition initiale. L'unique solution est la fonction :

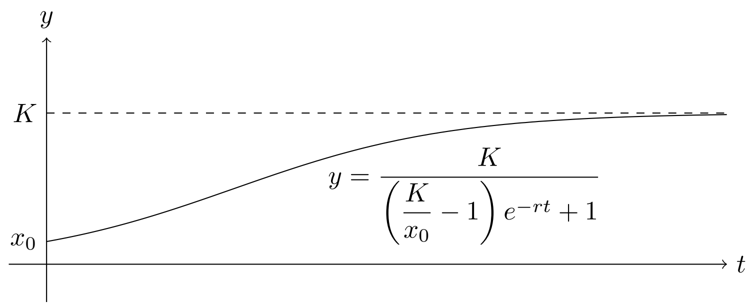
$$t \mapsto \left(z_0 - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}.$$

   f. On en déduit que :

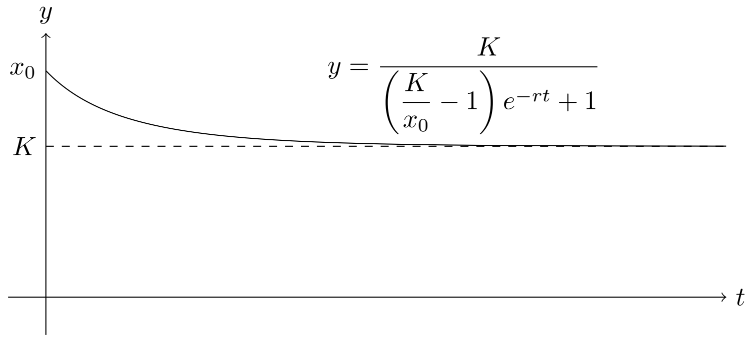
$$\forall t \geqslant 0,\ x(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{\left(z_0 - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-rt} + 1}.$$

   g. Puisque $r > 0$, on trouve immédiatement que $\lim_{t \to +\infty} x(t) = K$.

   h. Si $x_0 < K$, on obtient :



Si $x_0 > K$, on obtient :




i. Dans le premier modèle, les ressources sont supposées infinies, garantissant une croissance exponentielle indéfiniment. Dans le second modèle, la limitation des ressources permet la croissance de la population tant que son effectif est inférieur à la constante $K$ et sa décroissance tant que son effectif est supérieur à $K$. La constante $K$ est appelée capacité d'accueil.

**Corrigé de l'exercice 2.** [Énoncé]

1. a. Puisque $Q' = \dfrac{P'}{P}$, une fonction $P$ est solution de l'équation différentielle

$$y' = ky \ln\left(\frac{M}{y}\right)$$

si, et seulement si,

$$Q' = k \ln\left(\frac{M}{P}\right) \Leftrightarrow Q' = k\ln(M) - kQ.$$

b. On reconnait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. L'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & Ce^{-kt} + \ln(M) \end{array}, \ C \in \mathbb{R} \right\}.$$

c. Puisque $P = \exp(Q)$, il existe un réel $C$ tel que :

$$\forall t \geqslant 0, \ P(t) = e^{Ce^{-kt} + \ln(M)} = Me^{Ce^{-kt}}.$$

2. • Si $k > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-kt} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = M$.
   • Si $k = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = Me^C$.
   • Si $k < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-kt} = +\infty$.
     – Si $C > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = +\infty$.
     – Si $C = 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = M$.
     – Si $C < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 0$.

3. Puisque $P_0 = Me^C$, $C = \ln\left(\dfrac{P_0}{M}\right)$. L'orientation du signe de $C$ est déterminée par la relation entre les valeurs de $P_0$ et de $M$ : $P_0 > M$ si, et seulement si, $C$ est strictement positif.

4. a. D'après la question précédente, $C < 0$ puisque $P_0 = 1 < M$. La fonction $\left(t \mapsto Ce^{-kt}\right)$ est donc décroissante donc la fonction $P$ aussi. D'après la question 2, $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 0$.

   Conclusion : l'effectif de la population décroit et tend vers 0, justifiant l'expression "population en voie d'extinction".

   b. On cherche à résoudre l'inéquation $P(t) \leqslant 0,01$.

$$\begin{aligned} P(t) \leqslant 0,01 &\Leftrightarrow Me^{Ce^{-kt}} \leqslant 0,01 \\ &\Leftrightarrow Ce^{-kt} \leqslant \ln\left(\frac{0,01}{M}\right) \\ &\Leftrightarrow t \geqslant -\frac{1}{k} \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{0,01}{M}\right)}{C}\right) \approx 18,6. \end{aligned}$$

   Il faudra environ 19 années pour que la population ait moins de 10 individus.

**Corrigé de l'exercice 3.** [Énoncé]

1. a. Puisque la fonction $1 + y^2$ ne s'annule pas sur l'intervalle $I$, on obtient l'équivalence suivante : $(E_1) \Leftrightarrow \forall x \in I, \ \dfrac{y'(x)}{1 + y^2(x)} = 1 + x$. En primitivant cette égalité, on trouve qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \ \arctan(y(x)) = x + \frac{x^2}{2} + C.$$

b. Supposons que $y$ soit solution de $(E_1)$ sur un intervalle $I$. Puisque arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ y(x) = \tan\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right).$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ y(x) = \tan\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right).$$

La fonction $y$ est dérivable sur $I$ et :

$$\forall x \in I,\ y'(x) = (1+x)\left(1 + \tan^2\left(x + \frac{x^2}{2} + C\right)\right) = (1+x)(1+y^2).$$

L'équivalence attendue est donc bien prouvée.

2. On trouve de la même manière que les solutions de $(E_2)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(e^x + C)$ (définies sur leurs ensembles de définition respectifs).

**Corrigé de l'exercice 4.** [Énoncé]

1. Pour chaque équation différentielle, on pose $y$ une solution qui ne s'annule pas sur un intervalle $I$.

(i) En posant $z = \sqrt{y}$, on trouve que :

$$y' = y + x\sqrt{y} \Leftrightarrow \frac{y'}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} + x \Leftrightarrow z' = \frac{z}{2} + \frac{x}{2}.$$

Après résolution (déterminations des solutions homogènes puis d'une solution particulière) de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1, on trouve que :

$$\begin{aligned} y' = y + x\sqrt{y} &\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ z(x) = Ce^{\frac{x}{2}} - x - 2 \\ &\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \left(Ce^{\frac{x}{2}} - x - 2\right)^2. \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que les fonctions $\left(x \mapsto \left(Ce^{\frac{x}{2}} - x - 2\right)^2\right)$ sont solutions.

(ii) En posant $z = \frac{1}{y}$, on trouve que :

$$xy' + 3y = x^2y^2 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{3}{xy} = x \Leftrightarrow -z' + \frac{3}{x}z = x.$$

Après résolution (déterminations des solutions homogènes puis d'une solution particulière) de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1, on trouve que :

$$\begin{aligned} xy' + 3y = x^2y^2 &\Rightarrow -z' + \frac{3}{x}z = x \\ &\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ z(x) = Cx^3 + x^2 \\ &\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \frac{1}{Cx^3 + x^2}. \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que les fonctions $\left(x \mapsto \frac{1}{Cx^3 + x^2}\right)$ sont solutions.

2. a. La fonction $y_1 : x \mapsto x + 1$ est une solution particulière $y_1$ de l'équation différentielle $(E_1)$.

b. Soit $y$ une solution de $(E_1)$. On trouve immédiatement que :

$$z' = y' - y_1' = (y-x)^2 - 1 = (z+1)^2 - 1 = z^2 + 2z\ (E_2).$$

c. La fonction nulle est bien solution de $(E_2)$. Si $z$ est une solution non nulle de $(E_2)$, elle ne s'annule pas (admis). Posons alors $h = \frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned} z' = z^2 + 2z &\Leftrightarrow \frac{z'}{z^2} = 1 + \frac{2}{z} \\ &\Leftrightarrow -h' = 1 + 2h \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ h(x) = Ce^{-2x} - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \frac{1}{Ce^{-2x} - \frac{1}{2}} - x - 1. \end{aligned}$$

**Corrigé de l'exercice 5.** [Énoncé]

On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

1. La fonction $g$ admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ par composition car les fonctions $f$, $(u,v) \mapsto 3u - v$ et $(u,v) \mapsto v - 2u$ aussi. On trouve que :

$$\begin{aligned} \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= 3\frac{\partial f}{\partial x}(3u-v, v-2u) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(3u-v, v-2u) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= -\frac{\partial f}{\partial x}(3u-v, v-2u) + \frac{\partial f}{\partial y}(3u-v, v-2u). \end{aligned}$$

Soit $f$ une fonction solution. Déterminer les dérivées partielles de la fonction

$$g : (u, v) \mapsto f(3u - v, v - 2u).$$

2. Raisonnons par double inclusion. Si $f$ est solution de l'équation aux dérivées partielles, alors :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = 0.$$

Il existe donc une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = h(v)$, c'est-à-dire $f(3u - v, v - 2u) = h(v)$. Puisque :

$$\begin{cases} 3u - v = x \\ v - 2u = y \end{cases} \Rightarrow v = 2x + 3y,$$

On trouve que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = h(2x + 3y).$$

Réciproquement, seules fonctions $(x, y) \mapsto h(2x + 3y)$ **où** $h$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ sont solutions.

L'équation aux dérivées partielles admet donc pour solutions toutes les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto h(2x + 3y)$, où $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

**Corrigé de l'exercice 6.** [Énoncé]

1. La fonction $V$ est dérivable par composition et :

$$\begin{aligned} \forall t > 0,\ \varphi'(t) &= x'(t)\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= x(t)(1 - y(t))\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), y(t)) - y(t)(1 - x(t))\frac{\partial V}{\partial y}(x(t), y(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto V(x(t), y(t))$ est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons $V : (x, y) \mapsto \varphi(x) + \psi(y)$. La fonction $V$ admet des dérivées partielles de $V$ sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = \varphi'(x) \text{ et } \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \psi'(x).$$

Raisonnons par analyse-synthèse. Si $V$ est solution, alors :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x(1 - y)\varphi'(x) = y(1 - x)\psi'(y),$$

c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \left(\frac{1}{y} - 1\right)\varphi'(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)\psi'(y).$$

Si les fonctions $\varphi$ et $\psi$ vérifient

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 \text{ et } \psi'(y) = \frac{1}{y} - 1.$$

alors $V$ est solution de $(E)$. Les fonctions $\varphi = \psi : x \mapsto \ln x - x$ sont donc candidates (fin de l'analyse-synthèse).

On vérifie sans difficulté que la fonction

$$V : (x, y) \mapsto \ln x - x + \ln y - y$$

est solution de $(E)$.